

### Algebra und Zahlentheorie.

**Vahlen, Karl Theodor:** Eine problematische Eigenschaft der Binomialkoeffizienten. *Tôhoku Math. J.* 38, 356—357 (1933).

Es wird die Frage gestellt: Können  $r + 2$  aufeinanderfolgende Binomialkoeffizienten in arithmetischer Reihe  $r$ -ter Ordnung sein? Mit der bekannten Beziehung zwischen den ersten  $r + 2$  Gliedern einer solchen Reihe findet man eine diophantische Gleichung, die für  $r = 1, 2$  gelöst werden kann. Für  $r = 3, 4$  Beispiele.

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

**Wegner, U., und J. Wellstein:** Bemerkungen zur Transformation von komplexen symmetrischen Matrizen. *Mh. Math. Phys.* 40, 319—322 (1933).

Es gibt zu jeder symmetrischen unitären Matrix  $U$  ( $U = U' = \bar{U}^{-1}$ ) eine reelle orthogonale Matrix  $O$ , so daß  $OUO' = A$  eine Diagonalmatrix wird. Und es gibt zu jeder komplexen symmetrischen Matrix  $S$  ( $S = S'$ ) eine unitäre Matrix  $U$ , so daß  $USU' = D$  eine Diagonalmatrix wird.

van der Waerden (Leipzig).

**Romanovsky, V.:** Un théorème sur les zéros des matrices non négatives. *Bull. Soc. Math. France* 61, 213—219 (1933).

Es sei  $A = [a_{ik}]$  eine quadratische Matrix mit nichtnegativen Elementen  $a_{ik} \geq 0$ ; Frobenius hat gezeigt, daß die charakteristische Gleichung  $|sE - A| = 0$  eine positive Wurzel  $r$  hat, so daß der absolute Betrag einer jeden Wurzel höchstens  $r$  ist, falls  $A$  unzerlegbar ist. Romanovsky gibt nun eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß für eine natürliche Zahl  $k$  alle Wurzeln der Gleichung  $s^k = r^k$  charakteristische Wurzeln der Matrix  $A$  sind.

Szász (Cambridge).

**Craig, J. I.:** An extension of Newton's method to the calculation of the complex roots of an algebraic equation. *Bull. Inst. Égypte* 15, 207—220 (1933).

Das Newtonsche Näherungsverfahren ist bekanntlich auf komplexe Wurzeln einer Gleichung ebenso wie auf reelle anwendbar, doch wird häufig das Verfahren von Graeffe oder andere vorgezogen, um dem umständlichen Rechnen mit den komplexen Größen auszuweichen. Der Verf. gibt hier einen Rechnungsgang an, der diesen Nachteil merklich herabmindert. Das Wesentliche daran ist, daß die Einsetzung eines komplexen Näherungswerts  $p_0 + iq_0$  dadurch erleichtert wird, daß zunächst der Rest bei der Division durch das reelle quadratische Polynom  $x^2 + mx + n$  bestimmt wird, dessen Nullstelle  $p_0 + iq_0$  ist, und nun in diesen (linearen) Rest eingesetzt wird, was denselben Funktionswert ergibt. Ferner wird die Division von  $F(p_0 + iq_0)$  durch  $F'(p_0 + iq_0)$ , wie sie das Newtonsche Verfahren erfordert, durch die Zerlegung in die reellen und imaginären Teile und geeignete Zusammenfassung für die bequeme Rechnung vorbereitet. Zum Abschluß wird ein genaues Rechenschema aufgestellt, das mechanisch angewendet werden kann. — Es folgt dann noch eine Abänderung des Verfahrens, bei der die Verwendung des Näherungswerts  $p_0 + iq_0$  noch mehr eingeschränkt und durch Rechnung mit den Koeffizienten des eben genannten Polynoms  $x^2 + mx + n$  ersetzt ist. Die dabei auftretenden symmetrischen Funktionen von  $p_0 + iq_0$  und der konjugierten Größe lassen sich durch (übrigens bekannte) Formeln, die durch Rekursion zu erhalten sind, ausdrücken. Für die Auffindung von Näherungswerten als Ausgangspunkt für die Rechnung empfiehlt der Verf. eine geometrische Skizze. Ein Beispiel wird nach beiden Arten durchgerechnet. Die Rechenarbeit hält der Verf. für etwas geringer als beim Graeffeschen Verfahren. Rechenmaschinen sind dabei sehr vorteilhaft zu verwenden.

L. Schrutka (Wien).

**Obrechhoff, Nikola:** Sur les zéros réels des polynomes. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 236—238 (1934).

Es handelt sich um reelle Polynome  $P_m(x)$   $m$ -ten Grades ( $m = 0, 1, \dots$ ), zwischen denen Relationen von der Form  $P_m(x) = (\alpha_m x + \beta_m) P_{m-1}(x) + \gamma_m P_{m-2}(x)$  ( $m \geq 2$ ,  $\alpha_m \cdot \gamma_m \neq 0$ ) bestehen. Sind die Nullstellen von  $P_n(x)$  alle reell und von den Nullstellen des Polynoms  $P_{n-1}(x)$  getrennt, so hat jedes Polynom  $f(x)$  bzw.  $\varphi(x)$  von der Form  $f(x) = \lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x) + \dots + \lambda_{2n-1} P_{2n-1}(x)$  bzw.

$$\varphi(x) = \lambda_m P_m(x) + \lambda_{m+1} P_{m+1}(x) + \dots + \lambda_{m+p} P_{m+p}(x) \quad (2n \geq 2m + p),$$

wo die Koeffizienten  $\lambda_k$  beliebige reelle Zahlen bedeuten, mindestens eine Nullstelle bzw. mindestens  $m$  Nullstellen zwischen den äußersten Nullstellen von  $P_n(x)$ .

Sz. Nagy (Szeged).

**Aihara, Yônosin:** On some inequalities among the roots of an equation and its successive derivatives. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 16, 1—6 (1934).

Von einem Problem von Kakeya ausgehend, beweist Verf. den Satz: Ist  $f(x)$  ein Polynom  $n$ -ten Grades, bezeichnet  $S_m$  bzw.  $S_{m,k}$  die Summe der  $m$ -ten Potenzen der Nullstellen von  $f(x)$  bzw.  $f^{(k)}(x)$  und ist

$$D_{m,p} = \frac{S_m}{n} - \binom{p}{1} \frac{S_{m,1}}{n-1} + \binom{p}{2} \frac{S_{m,2}}{n-2} - \dots (-1)^p \binom{p}{p} \frac{S_{m,p}}{n-p}, \quad (n > p)$$

so ist  $D_{m,1} = D_{m,2} = \dots = D_{m,m} = 0$ . — Es gibt Polynome  $n$ -ten Grades mit lauter reellen Nullstellen, für welche der Wert von  $D_{2,3}$  eine beliebig angegebene reelle Zahl ist.

Sz. Nagy (Szeged).

**Hensel, Kurt:** Über die vollständige arithmetische Auflösung der algebraischen Gleichungen. S.-B. Berlin. math. Ges. 32, 3—16 (1933).

In dieser Skizze wird dargelegt, wie die Teilbarkeitsbeziehungen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung  $F(x) = 0$  mit Koeffizienten aus einem Körper  $\mathbb{K}$  zu einem Primelement  $p$  von  $\mathbb{K}$  untersucht werden können, wenn man zur Bildung eines Zerfällungskörpers von  $F(x)$  die  $p$ -adische Erweiterung von  $\mathbb{K}$  zusammen mit gewissen einfachen (durch sogar modulo  $p$  irreduzible Gleichungen definierte) algebraischen Erweiterungen benutzt. Diese „arithmetische“ Auflösungsmethode wird in Gegensatz gestellt zu der „algebraischen“ Methode von Kronecker, die Wurzeln einer Gleichung als Kongruenzklassen des Polynomreiches  $\mathbb{K}(x)$  modulo irreduziblen Polynomen zu konstruieren. Zum Schluß wird noch gezeigt, wie die  $p$ -adische Methode auch für die Untersuchung des Teilbarkeitsverhaltens der Wurzeln von  $F(x) \equiv 0$  modulo mehreren Primelementen  $p_1, \dots, p_r$  benutzt werden kann.

Die ohne Beweis aufgestellte Behauptung, daß ein in der  $p$ -adischen Erweiterung von  $\mathbb{K}$  irreduzibler Faktor  $f$ -ten Grades  $f(x)$  von  $F(x)$  durch Adjunktion eines über dem Grundkörper  $\mathbb{K}$  algebraischen Elementes  $\varrho$  vom  $f$ -ten Grades und eines neuen Primelementes  $\pi$  mit  $(\pi)^e = (p)$  zerfällt werden kann, ist im allgemeinen nicht richtig. Man erkennt das etwa für ein galoissches  $F(x)$  und einen Faktor  $f(x)$  vom Grade  $f$ , also  $e = 1$ . Dann erzeugen die Koeffizienten von  $f(x)$  den Zerlegungskörper  $Z$  eines Primfaktors von  $p$  in dem durch  $F(x)$  erzeugten Körper  $\mathbb{K}(\xi)$ . Wäre  $\mathbb{K}_p(\xi) = Z(\varrho)$ , so wäre  $\mathbb{K}_p(\xi)$  das direkte Produkt der Körper  $Z_p$  und  $\mathbb{K}_p(\varrho)$ , was im allgemeinen nicht der Fall ist. Hierdurch wird auch die Gültigkeit der Untersuchungen über die Entwicklung der Gleichungswurzeln für mehrere Primelemente eingeschränkt.

Deuring (Leipzig).

**Morimoto, Seigo:** Über die Größenordnung des absoluten Betrages von einer linearen inhomogenen Form: Untersuchung des Hardy-Littlewoodschen Problems. Tôhoku Math. J. 38, 7—33 (1933).

Hardy-Littlewood stellten die Aufgabe, bei reellen  $\alpha$  und  $\beta$  die Zahl

$$F(\alpha, \beta) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \min_{|x| < t} |t(\alpha x - y + \beta)| \quad (x, y \text{ ganz})$$

zu untersuchen. Nach Khintchine-Morimoto gilt: Die notwendige und hinreichende Bedingung, daß  $F(\alpha, \beta) = 0$  oder  $= \infty$  sein kann, ist die Nichtbeschränktheit der Teilnenner des Kettenbruchs  $\alpha$ . — Mit Hilfe der früher vom Verf. aufgestellten Algorithmen [Jap. J. Math. 3 (1926), 4 (1927), 5 (1929), 6 (1930); der Verf. nannte sich früher

S. Fukasawa], welche mittels der Kleinschen geometrischen Darstellung gewonnen werden, werden nun die folgenden Ergänzungen gegeben: Es seien die Teilnenner von  $\alpha$  sämtlich  $\leq q$ . Dann gilt (das Minimum = wie oben zu deuten):

$$\text{Min } |t(\alpha x - y + \beta)| < \frac{(k+1)^2 + 2\sqrt{k^2 + 2k}}{8\sqrt{k^2 + 2k}}, \quad \text{falls } q = 2k > 1,$$

$$\text{Min } |t(\alpha x - y + \beta)| < \frac{(k^2 + 3k + 2) + \sqrt{4k^2 + 12k + 5}}{4\sqrt{4k^2 + 12k + 5}}, \quad \text{falls } q = 2k + 1 > 1,$$

$$F(\alpha, \beta) \geq \frac{q + 2 + \sqrt{q^2 + 4q}}{2(q + 4)\sqrt{q^2 + 4q}}, \quad \text{falls } q > 5.$$

In jedem dieser Fälle wird gezeigt, daß das Ergebnis scharf ist. *J. F. Koksma.*

**Lindemann, F. A.:** The unique factorization of a positive integer. *Quart. J. Math., Oxford Ser. 4*, 319—320 (1933).

Kurzer Beweis für die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung jeder natürlichen Zahl, der jedoch der Sache nach mit dem Beweis von Zermelo und Hasse übereinstimmt [vgl. Hasse, H., Über eindeutige Zerlegung in Primelemente oder in Primhauptideale in Integritätsbereichen, *J. reine angew. Math.* **159**, 1, Anm. 1 (1928) und 6, Absatz d].

*Bessel-Hagen (Bonn).*

**Florescu, Ioan B.:** Über die Auflösung einer homogenen Gleichung 2-ten Grades von  $n$  Veränderlichen in ganzen Zahlen. *Gaz. mat.* **39**, 167—171 (1934) [Rumänisch].

**Brahana, H. R.:** On cubic congruences. *Bull. Amer. Math. Soc.* **39**, 962—969 (1933).

Jedem Komplex der Erzeugenden einer Abelschen Gruppe, die gewisse Bedingungen erfüllt, ordnet der Verf. eine irreduzible ganzzahlige kubische Kongruenz (1)  $x^3 - \alpha x^2 + \beta \equiv 0 \pmod{p}$ ,  $p$  Primzahl, (Satz I) zu. Die Transformation der Erzeugenden ergibt eine neue kubische Kongruenz, welche man aus der vorigen mittels der Transformation (2)  $x' = (-x + a)/(bx - c)$  erhalten kann. Der Verf. wendet im wesentlichen die Transformation (2) auf die irreduzible Kongruenz (3)  $x^3 + \beta \equiv 0 \pmod{p}$ , wo  $p \equiv 1 \pmod{6}$ , an und folgert, daß jede kubische irreduzible Kongruenz die Gestalt  $x^3 - \alpha x + (27\beta^2 + c^6\alpha^3)/(27\beta c^3) \equiv 0$ ,  $\pmod{p}$  besitzt (Satz II). Endlich erhält der Verf. den Satz III. „If  $p$  is of the form  $6k-1$  and  $x^3 - x + \beta \equiv 0 \pmod{p}$  is irreducible, then  $x^3 - x + \beta(4 - 27\beta^2)^{\frac{1}{3}} \equiv 0$  is also irreducible.“ — Der Referent bemerkt hinzu, daß 1. schon L. E. Dickson [*Bull. Amer. Math. Soc.* **13**, 1—8 (1906)] alle reduziblen und irreduziblen kubischen Kongruenzen bestimmt hat und 2. für die Beweise der zitierten Sätze die gruppentheoretische Interpretation belanglos ist. Alles läßt sich unmittelbar aus (2) erhalten.

*Lubelski (Warschau).*

**James, R. D.:** The representation of integers as sums of pyramidal numbers. *Math. Ann.* **109**, 196—199 (1933).

The author, following Landau's method of proof for eight cubes, shows that every sufficiently large integer is a sum of eight pyramidal numbers  $(x^3 - x)/6$ ,  $(x = 0, 1, 2, \dots)$ . The clue is to study the residues of  $f(z + t) + f(z - t) = t^2 z + (z^3 - z)/3 \pmod{p^3}$ , where  $f(x) = (x^3 - x)/6$ , and hence to express every sufficiently large number in the form  $f(z + t) + f(z - t) + f(p^3 + A) + f(p^3 - A) + f(2p^3 + B) + f(2p^3 - B) + f(5p^3 + C) + f(5p^3 - C)$ ,

with the aid of the ternary form  $A^2 + 2B^2 + 5C^2$  and certain clever inequalities. Empirical results indicate that eight is still too high. *G. Pall (Montreal).*

**Lehmer, D. N.:** A census of squares of order 4, magic in rows, columns, and diagonals. *Bull. Amer. Math. Soc.* **39**, 981—982 (1933).

Die von Frenicle gefundene Anzahl 7040 aller 16-zelligen magischen Quadrate hat der Verf. auf kürzerem Wege berechnet, indem er neben den 8, aus den bekannten Drehungen bestehenden Transformationen, noch die andere:  $U, S, US$  benutzt. Dabei bedeutet  $U$  die Vertauschung der beiden mittleren Reihen und der beiden mitt-

leren Kolonnen;  $S$  die Vertauschung der 1. und 2., 3. und 4. Reihe und der 1. und 2., 3. und 4. Kolonne. Die Anzahl aller m. Q. des Systems, von welchen keines durch eine dieser 32 Transformationen in ein anderes des Systems übergeführt wird, wird dann als 220 festgestellt.

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Evelyn, C. J. A., and E. H. Linfoot: On a problem in the additive theory of numbers.

VI. Quart. J. Math., Oxford Ser. 4, 309—314 (1933).

Bezeichnungen und Annahmen: Alles, außer  $\varepsilon$ , ganze Zahlen.  $s \geq 2$ ,  $N \geq 2$ ,  $n \geq 2$ ,  $1 \leq b \leq a$ ,  $(a, b) = c$ ;  $M \geq 1$  durch kein  $p^N$  ( $N$ -te Primzahlpotenz) teilbar;  $v_s(n) = v_s(a, b, N; n)$  die Anzahl der Darstellungen von  $n$  in der Gestalt  $n = M_1 + \dots + M_s$  ( $s$  Zahlen der  $M$ -Klasse),  $M_1 \equiv b \pmod{a}$ , ...,  $M_s \equiv b \pmod{a}$ ;

$p_1, p_2, \dots$  alle Primzahlen, wachsend geordnet;  $a = \prod_{r=1}^{\infty} p_r^{\alpha_r}$ ;

$$S(n) = S(a, b, s, N; n) = \prod_{p_r^N \nmid n, p_r \nmid \frac{a}{c}} \left( 1 + \frac{(-1)^{r+1}}{(p_r^{N-\alpha_r} - 1)^s} \right) \prod_{p_r^N \mid n, p_r \nmid \frac{a}{c}} \left( 1 + \frac{(-1)^r}{(p_r^{N-\alpha_r} - 1)^{s-1}} \right);$$

$\varepsilon > 0$  beliebig;  $c = M$  (sonst gibt es keine  $M$ -Zahl  $\equiv b \pmod{a}$ ), und es ist  $v_s(n) = 0$ );  $n \equiv sb \pmod{a}$  (sonst ist offenbar  $v_s(n) = 0$ ). Hauptsatz: Bei wachsendem  $n$  ist

$$v_s(n) = \frac{1}{(s-1)!} \left( \frac{n}{a} \right)^{s-1} \prod_{p_r \nmid \frac{a}{c}} \left( 1 - \frac{1}{p_r^{N-\alpha_r}} \right)^s S(n) + O\left(n^{s-2+\frac{2}{N+1}+\varepsilon}\right).$$

Für  $a = 1$  ist hierin der Hauptsatz von III (s. dies. Zbl. 3, 340) enthalten.

Die Verf. beweisen zunächst den Spezialfall  $s = 2$ , indem sie aber nicht ihr Verfahren von II (vgl. dies. Zbl. 1, 202), sondern die vereinfachte Darstellung Estermanns (vgl. dies. Zbl. 1, 127) benutzen. Dies wird ins einzelne bis zu der Stelle durchgeführt, wo die Wertbestimmung von  $S(n)$  beginnt. Hier verweisen die Verf. auf die ähnlichen Rechnungen in III. Ebenso wird für die darauf folgende Induktion  $s \rightarrow s+1$  auf III verwiesen. Keine der vier Formeln, die in diesem skizzierten Teil der Arbeit stehen, ist richtig wiedergegeben.

S. 313, Zeile 4 von unten muß es heißen:  $\left(x_1, \frac{a}{c}\right) = 1, \dots, \left(x_s, \frac{a}{c}\right) = 1$ , und nicht  $\left(x_1, \dots, x_s, \frac{a}{c}\right) = 1$ . (Die Textfassung hat mich zu stundenlangen unnützen Rechnungen verleitet.) Auf der nächsten Seite sind an drei Stellen ähnliche Berichtigungen vorzunehmen. Was sonst noch zu ändern ist, wird der Leser ohne besondere Schwierigkeit erkennen. (V. vgl. dies. Zbl. 4, 342).

A. Walfisz (Radoś, Polen).

Shah, S. M.: On an asymptotic formula for  $\pi_2(x)$ . Indian Phys.-Math. J. 4, 47 bis 53 (1933).

Es sei  $\pi(x)$  die Anzahl aller Primzahlen  $\leq x$ ,  $\pi_2(x)$  die Anzahl solcher Zahlen  $\leq x$ , die Produkte von zwei Primzahlen sind. Aus  $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$  folgerte Landau elementar, daß  $\pi_2(x) \sim \frac{x \log \log x}{\log x}$  ist (Handbuch, 208). Ebenso will Verf. aus  $\pi(x) = \frac{x}{\log x} + 1! \frac{x}{\log^2 x} + \dots + (q-1)! \frac{x}{\log^q x} + O\left(\frac{x}{\log^{q+1} x}\right)$  [ $q$  eine beliebige natürliche Zahl] folgenden Schluß ziehen:

$$\pi_2(x) = \frac{x \log \log x}{\log x} + a_1 \frac{x}{\log x} + 1! \frac{x \log \log x}{\log^2 x} + a_2 \frac{x}{\log^2 x} + 2! \frac{x \log \log x}{\log^3 x} + a_3 \frac{x}{\log^3 x} + 3! \frac{x \log \log x}{\log^4 x} + \dots + a_{q-1} \frac{x}{\log^{q-1} x} + (q-1)! \frac{x \log \log x}{\log^q x} + O\left(\frac{x}{\log^q x}\right),$$

mit geeigneten  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{q-1}$ . Der Beweis ist fehlerhaft: Man darf S. 50, Zeile 8 durchaus nicht  $n$  nach Belieben groß werden lassen, etwa so groß, daß

$$r(r+1) \dots (r+n-1) \log \log x / \{(n-1)! 2^n \log^r x\} = O(\log^{-r-q} x)$$

wird, weil dann das von  $n$  abhängige Restglied  $O(\log^{-r-q} x)$ , welches S. 49, Zeile 4 von unten steht, sehr unangenehm werden kann. Und erst recht darf man natürlich  $n$  nicht gegen  $\infty$  streben lassen, um  $R_n$  ganz aus der Welt zu schaffen.

A. Walfisz (Radoś, Polen).

## Mengenlehre und reelle Funktionen.

**Sélimanowski, E.:** Sur les propriétés des constituantes des ensembles analytiques. Fundam. Math. 21, 20—28 (1933).

This note derives for any analytic set, properties similar to those of analytic subsets of complements of analytic sets. In terms of constituents, members of a well ordered series of nonoverlapping  $B$ -measurable sets totalling to the given set and obtained by Lusin by the sieve method, these properties are: (a). If  $E$  is an analytic set of positive measure, then there exists a denumerable set of constituents whose total measure is the measure of  $E$ . (b) If  $E$  is of the second category on (a, b) then there exists at most a denumerable subset of constituents of  $E$  of the second category on (a, b), the sum of the remaining constituents being of the first category on (a, b). (c) If  $E$  is not  $B$ -measurable then there is a nondenumerable infinity of constituents of  $E$ , which has the power of the continuum.

*T. H. Hildebrandt* (Ann Arbor).

**Sierpiński, W.:** Sur les constituantes des ensembles analytiques. Fundam. Math. 21, 29—34 (1933).

This paper proves the theorems of the preceding paper in a simple way, using previously formulated [see Fundam. Math. 8, 363 (1926)] expressions of the analytic set  $E$  as the sum and product of certain well ordered series of  $B$ -measurable sets derived from the system of intervals  $\delta_{n_1} \dots n_k$  of which  $E$  is the kernel. *T. H. Hildebrandt*.

**Jarník, Vojtěch:** Sur les nombres dérivés approximatifs. Fundam. Math. 22, 4 bis 16 (1934).

A number  $l$  is said to be an essential right (left) derivate of a function  $x(t)$  at a point  $t_0$  if  $x(t) - x(t_0)/t - t_0 \rightarrow l$  as  $t$  tends to  $t_0$  along a measurable set of unit density to right (left) at  $t_0$ . In virtue of a Denjoy-Khintchine theorem if  $x(t)$  is a measurable function then at any point  $t$ , except possibly at points of a set of measure zero,  $x(t)$  has either the finite approximate derivative or, on both sides of  $t$ , two essential derivatives respectively equal to  $+\infty$  and  $-\infty$ . Khintchine [Rec. Soc. math. Moscou 31, 265—285, esp. 274—277 (1922/1924)] completed the above theorem by constructing a measurable function which almost everywhere fulfils the last alternative. Jarník generalizes that result as follows: 1. There exists a continuous function  $x(t)$  in  $(0, 1)$  such that almost everywhere any number  $l$  (finite or infinite) is an essential right derivate of  $x(t)$ ; the set of such functions is the complement of a set of the first category in the functional space  $C$  of continuous functions. 2. There exists a continuous function  $x(t)$  such that almost everywhere  $\lim_{h \rightarrow 0} |x(t+h) - x(t)/h| = \infty$  (in virtue of Theorem 1 the set of functions possessing this property is itself of the first category in the space  $C$ ). — By the Denjoy-Lusin theorem (extended by Banach to arbitrary functions) a set of points at which a function  $x(t)$  has the derivative  $x'(t)$  equal to  $+\infty$  is of measure zero. This result has been generalized in two directions, by replacing  $x'(t)$  either by the approximate derivative or by the expression  $\lim_{h \rightarrow 0} |x(t+h) - x(t)/h|$ . In this connection Jarník's Theorem 2 shows that the last limit cannot be replaced by the approximate one.

*Saks* (Warszawa).

**Clarkson, J. A.:** On double Riemann-Stieltjes integrals. Bull. Amer. Math. Soc. 39, 929—936 (1933).

Es werden die beiden folgenden Definitionen des Riemann-Stieltjes-Integrals

$\int_a^b \int_c^d f(x, y) d_x d_y \varphi(x, y)$  betrachtet: Die Intervalle  $[a, b]$ ,  $[c, d]$  werden zerlegt durch  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ ,  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$ ; es wird gesetzt  $\Delta \varphi(x_i, y_j) = \varphi(x_{i-1}, y_{j-1}) - \varphi(x_{i-1}, y_j) - \varphi(x_i, y_{j-1}) + \varphi(x_i, y_j)$ . 1. Definition (restricted integral): das Integral ist Grenzwert der Summen  $\sum_{i,j=1}^{m,n} f(\xi_i, \eta_j) \Delta \varphi(x_i, y_j)$ ,

wo  $\xi_i, \eta_j$  beliebige Werte in  $[x_{i-1}, x_i], [y_{j-1}, y_j]$ . 2. Definition (unrestricted integral):

Das Integral ist Grenzwert der Summen  $\sum_{i,j=1}^{m,n} f(p_{ij}) \Delta \varphi(x_i, y_j)$ , wo  $p_{ij}$  ein beliebiger Punkt des Rechteckes  $x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j$ . Damit für jedes stetige  $f$  das restricted integral existiere, ist notwendig und hinreichend, daß  $\varphi$  von endlicher Variation sei im Sinne von Vitali. Dieselbe Bedingung gilt für das unrestricted integral. Bei Beschränkung auf Funktionen  $f(x, y)$  der Gestalt  $g(x)h(y)$  gilt: Damit für alle stetigen  $g$  und  $h$  das restricted (bzw. unrestricted) integral  $\int_a^b \int_c^d g(x)h(y) dx dy \varphi(x, y)$  existiere, ist notwendig und hinreichend, daß  $\varphi$  von endlicher Variation sei im Sinne von Fréchet (bzw. im Sinne von Vitali). Hans Hahn (Wien).

**Grimshaw, M. E.:** The Cauchy property of the generalised Perron integrals. Proc. Cambridge Philos. Soc. **30**, 15—18 (1934).

An integral is said to possess the Cauchy property if it satisfies the following condition: if a function  $f(x)$  is integrable over each interval  $(a + \varepsilon, b - \eta)$  and if

$\lim_{\varepsilon, \eta \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\eta} f(x) dx$  exists, then  $f(x)$  is integrable over  $(a, b)$  and its integral there is equal to

the above limit. It is well-known that both the Denjoy-Perron and Denjoy-Khintchine integrals have that property. The author establishes properties of similar kinds for two recent generalizations of the Perron integral, due to Burkill. Thus: If  $f(x)$  is integrable ( $AP$ ) in  $(a, \beta)$ , where  $a \leq \beta < b$ , and  $F(x)$  is its indefinite integral in the interval  $a \leq x < b$ , and if  $F(x) \rightarrow B$  as  $x \rightarrow b$  along a set of unit density to the left at  $b$ , then  $f(x)$  is integrable ( $AP$ ) in  $(a, b)$  and its integral over that interval is equal to  $B$ . (The definition of the  $AP$  integral is analogous to that of the Perron integral with replacing ordinary continuity and derivatives by approximate ones). Another theorem concerns the  $CP$  (Césaro-Perron) integral [for the definition see Burkill, Proc. London Math. Soc. (2) **34**, 314—322 (1932); also this Zbl. **5**, 392]. Saks (Warszawa).

**Prasad, Ganesh:** On Lebesgue's absolute integral mean-value for a function having a discontinuity of the second kind. Tôhoku Math. J. **38**, 147—150 (1933).

Démonstration de la proposition suivante: Si la limite  $\Phi(+0)$  de la fonction  $\Phi(t)$  n'existe pas, l'équation

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} \int_0^h |\Phi(t) - A| dt = 0$$

où  $A$  est une constante quelconque, ne peut pas avoir lieu — et l'application de cette proposition à un critère de la sommabilité (C 1), donné par Lebesgue [Math. Ann. **61**, 251—280 (1905)]. F. Leja (Warszawa).

**Bochner, S.:** Absolut-additive abstrakte Mengenfunktionen. Fundam. Math. **21**, 211—213 (1933).

In elucidation of a question left open in his previous paper [Fundam. Math. **20**, 262—276 (1933); this Zbl. **7**, 109] the author gives an example of an abstract function of a real variable,  $F(x)$ , such that its increment ratio  $(F(x') - F(x))/(x' - x)$  is "bounded" in  $(0, 1)$ , but which is not differentiable at any point of  $(0, 1)$ . J. D. Tamarkin.

**Sierpiński, W.:** Sur une surface universelle pour les fonctions de Baire. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **35**, 225—227 (1933).

Eine Funktion  $f(x, y)$  ist eine universelle Funktion für die Baireschen Funktionen  $f(x)$ , wenn  $f(x, y)$  bei jedem festen  $y$  eine Bairesche Funktion von  $x$  ist und für eine beliebige Bairesche Funktion  $f(x)$  ein solches  $y$  existiert, daß  $f(x) = f(x, y)$  ist. Die Menge  $z = f(x, y)$  des dreidimensionalen Raumes, welche durch eine universelle Funktion  $f(x, y)$  bestimmt ist, kann nicht analytisch sein. Verf. konstruiert eine solche universelle Funktion  $f(x, y)$ , daß die Menge  $z = f(x, y)$  als die Summe  $A + (R^3 - B)$

$+(C - D)$  darstellbar ist, wobei  $A, B, C$  und  $D$  analytisch sind und  $R^3$  den ganzen dreidimensionalen Raum bezeichnet. *A. Kolmogoroff (Moskau).*

**Sierpiński, W.: Remarque sur les superpositions de fonctions continues.** Sonderdruck aus: C. R. Soc. Sci. Varsovie **26**, 3 S. (1933).

Es sei  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x), \dots$  eine unendliche Folge von Funktionen. Konvergieren die Iterationen  $\varphi_1(x) = f_1(x)$ ,  $\varphi_n(x) = f_n(\varphi_{n-1}(x))$  mit  $n \rightarrow \infty$  gegen eine bestimmte Limesfunktion  $\varphi(x)$ , so kann man  $\varphi(x)$  als die Iteration der unendlichen Ordnung betrachten. Sind dabei alle  $f_n(x)$  stetig, so gehört  $\varphi(x)$  höchstens zur ersten Baireschen Klasse. Jetzt zeigt Verf., daß nicht jede Funktion  $\varphi(x)$  der ersten Klasse als eine Iteration einer unendlichen Folge stetiger Funktionen darstellbar ist. Eine nicht darstellbare Funktion kann man folgendermaßen definieren:  $\varphi(x) = 0$ , wenn  $x < 0$ ,  $\varphi(0) = 2$ ,  $\varphi(x) = 1$ , wenn  $x > 0$ . *A. Kolmogoroff (Moskau).*

**Sierpiński, W.: Sur un problème de M. Ruziewicz concernant les superpositions des fonctions mesurables.** Sonderdruck aus: C. R. Soc. Sci. Varsovie **26**, 3 S. (1933).

D'après M. S. Ruziewicz il existe une telle fonction mesurable  $\psi(x)$  (de classe 1 de Baire) que toute fonction d'une variable réelle est représentable comme une fonction mesurable de la fonction  $\psi$  (voir Zbl. **7**, 106). L'auteur démontre qu'il est impossible de fixer une fonction d'une variable réelle  $\varphi(x)$ , telle que toute fonction d'une variable réelle soit égale à la fonction  $\varphi$  d'une fonction mesurable. *A. Kolmogoroff (Moskau).*

**Bary, Nina: Sur une classification des fonctions continues à partir des fonctions à variation bornée.** Rec. math. Moscou **40**, 326—370 (1933).

In einer früheren Arbeit der Verf. [Math. Ann. **103**, 185—248 und 598—653 (1930)] wurde die merkwürdige Tatsache bewiesen, daß jede stetige Funktion  $f(x)$  in der Form  $f(x) = \varphi_1(\varphi_2(x)) + \varphi_3(\varphi_4(x)) + \varphi_5(\varphi_6(x))$  dargestellt werden kann, wobei alle Funktionen  $\varphi$  totalstetig sind. Wenn man aber beliebige Funktionen  $\varphi$  mit beschränkter Schwankung zuläßt, so ist jede stetige Funktion schon in der Form

$$f(x) = \varphi_1(\varphi_2(x)) + \varphi_3(\varphi_4(x))$$

darstellbar. Man kann aber im Falle der Funktionen von beschränkter Schwankung auch neue Probleme betrachten, welche im Falle der totalstetigen Funktionen nicht auftreten. Es ist nämlich bekannt, daß die dreifachen Iterationen  $\varphi_1(\varphi_2(\varphi_3(x)))$  der totalstetigen Funktionen  $\varphi$  immer durch die zweifachen Iterationen ersetzbar sind. Jetzt aber beweist Verf., daß im Falle beliebiger Funktionen  $\varphi$  mit beschränkter Schwankung die  $n$ -fachen Iterationen immer zu neuen Funktionen führen, welche mit Hilfe der  $n - 1$ -fachen Iterationen unerreichbar sind. Es sei weiter  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$  eine unendliche Folge von Funktionen; konvergiert die Folge

$$\Phi_n(x) = f_n(f_{n-1}(\dots f_2(f_1(x)) \dots))$$

bei  $n \rightarrow \infty$  gegen einen bestimmten Limes  $f(x)$ , so kann man  $f(x)$  als Iteration der unendlichen Folge von Funktionen betrachten. Für jede Ordnungszahl der zweiten Klasse  $\alpha$  bestimmt Verf. mit Hilfe dieses neuen Begriffes die Iterationen der Funktionen mit beschränkter Schwankung von der Klasse  $\alpha$ . Es ergibt sich dann, daß es solche stetige Funktionen gibt, welche als Iterationen einer beliebig hohen Klasse  $\alpha$  darstellbar sind, ohne dabei durch die Iterationen der niedrigen Klassen darstellbar zu sein. Man kann aber auch solche stetige Funktionen konstruieren, welche durch die Iterationen von beliebig hohen Klassen nicht darstellbar sind. Es sei zum Schluß noch hervorgehoben, daß die oben gegebene Definition der Iteration einer unendlichen Folge von Funktionen zu mehreren weiteren interessanten Problemen führt.

*A. Kolmogoroff (Moskau).*

**Saks, Stanislaw: Addition to the note on some functionals.** Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 965—970 (1933).

Let  $\mathfrak{R}^*$  be an additive family of sets of an abstract space  $E$  and let  $\mu(X) \geq 0$  be a completely additive and finite-valued function of sets of  $\mathfrak{R}^*$ . The family  $\mathfrak{R}^*$  may be regarded as a metric complete space if the distance of two sets  $X_1, X_2$  of  $\mathfrak{R}^*$  is de-

defined by  $d(X_1, X_2) = \mu(X_1 - X_2 X_2) + \mu(X_2 - X_1 X_2)$ . Two theorems are established. 1. Let  $\{F_n(X)\}$  be a sequence of completely additive and absolutely continuous functions of measurable sets ( $\equiv$  sets of  $\mathfrak{R}^*$ ). If this sequence converges for any set (of sets of  $\mathfrak{R}^*$ ) of the second category in the space  $\mathfrak{R}^*$ , then the functions  $F_n(X)$  are equally absolutely continuous and  $\{F_n(X)\}$  converges for any measurable set  $X \subset E - (E_1 + \dots + E_m)$  where  $\{E_1, \dots, E_m\}$  is a finite sequence of singular sets. Consequently, if  $\{F_n(X)\}$  converges for all measurable sets  $X$ , the limit function is again absolutely additive and completely continuous function of measurable sets in  $E$ . [A measurable set  $X$  is singular if for any measurable subset  $Y$  of  $X$  either  $\mu(Y) = 0$  or  $\mu(X - Y) = 0$ ]. 2. If, with the same notation,  $\limsup_n |F_n(X)| < \infty$  for every set  $X$  of a set of the second category in  $\mathfrak{R}^*$ , then there exists a fixed constant  $M$  such that  $|F_n(X)| < M$  for every  $X \subset E - (E_1 + \dots + E_m)$ . These theorems are applied for a simple derivation of some results of Nikodym concerning sequences of completely additive functions of sets in an abstract space [C. R. Acad. Sci., Paris **192**, 727–728 (1931); this Zbl. **1**, 132.]

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

## Analysis.

### Reihen :

● Ser, J.: Les calculs formels des séries de factorielles. Paris: Gauthier-Villars 1933. VII, 100 S. Frs. 20.—.

The author discusses a large number of formal series and sequences arising from the use of the rectangular array of successive differences of functional values of  $f(x)$  for equispaced arguments. Questions of convergence are raised only incidentally. Some of the artifices introduced are shown to provide a practical procedure for numerical evaluation from certain asymptotic series. Formal reversion of series, termwise integration, and other transformations are employed and some recursion relations among coefficients established. Bernoulli numbers, the coefficients of certain logarithmic series, Euler's constant and the Gamma function, appear repeatedly. A large number of special symbols are introduced with several departures from traditional usage, adopted without stated reason. There are no references given to mathematical literature, and no body of theorems is developed. New concepts include the "fonction réciproque", and the "somme alternée réduite", of which illustrations are given.

Albert A. Bennett (Providence).

Mandelbrojt: Quelques théorèmes sur les séries de Fourier. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 1569–1571 (1933).

Suppose that  $f(t) < L(0, 2\pi)$ , and that for some  $t_0$ ,  $0 \leq t_0 < 2\pi$ ,

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} -\frac{1}{\log \alpha} \log \left[ -\log_{t_0}^{t_0+\alpha} |f(t)| dt \right] = \delta > 0.$$

(In the terminology of the author,  $t_0$  is a zero to the right of exponential order  $\delta$ .) Suppose

$$f(t) \infty \sum_{v=1}^{\infty} \{a_v \cos n_v t + b_v \sin n_v t\},$$

the exponent of convergence of the series  $\sum n_v^{-\sigma}$  being  $\sigma < 1$ . If  $\delta > \frac{\sigma}{1-\sigma}$ , then  $f(t) = 0$  almost everywhere. The inequality is in a certain sense the best possible, as the author is able to construct a lacunary Fourier series with a zero to the right of order  $\delta$  such that  $\frac{\sigma}{1-\sigma} - \varepsilon < \delta < \frac{\sigma}{1-\sigma}$ .

Hille (New Haven, Conn.).

Paley, R. E. A. C., and N. Wiener: Notes on the theory and application of Fourier transforms. III, IV, V, VI, VII. Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 761–791 (1933).

This is a continuation of the series of notes on the theory and applications of Fourier transforms started by the authors in the same volume of the Transactions, pp. 348–355 (this Zbl. **6**, 257). The main result of the Note III is the following extension of a theorem of Carleman: Let  $\{z_n = x_n + iy_n\}$  be a sequence of points in the half-plane  $\Im(z) > 0$ , and let  $f(z)$ , having  $z_n$  as zeros, be regular there and

satisfy the condition  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^2 dx < 1$ . Then the series (\*)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{1 + x_n^2 + y_n^2}$  converges.

Conversely, if (\*) converges, there exists a bounded function  $f(z)$  satisfying the above conditions and vanishing at  $z_n$ . Szaász' well known theorem concerning the closure (in  $L_2$ ) of the set of functions  $\{x^{\lambda_\nu}\}$  appears as an application of this general result. Various other closure theorems are proved in the next Note IV. Note V deals with entire functions. Let  $f(z)$  be an entire function and  $M_f(r)$ ,  $m_f(r)$ ,  $n_f(r)$  its maximum and minimum modulus on the circle  $|z| = r$ , and the number of zeros in this circle, respectively. The authors prove: If  $\log M_f(r) = O(r^{\frac{1}{2}})$  and

$\int_0^{\infty} \log^+ m_f(r) r^{-\frac{1}{2}} dr < \infty$ , then  $n_f(r) \sim Ar^{\frac{1}{2}}$ , where  $A = \pi^{-2} \int_0^{\infty} \log \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - x/|z_\nu|) |x|^{-\frac{1}{2}} dx$ .

Furthermore, if the order of  $f(z)$  does not exceed  $\frac{1}{2}$ , and if  $n_f(r) \sim Br^{\frac{1}{2}}$ ,  $f(0) = 1$ ,

where  $B = -\pi^{-2} \int_0^{\infty} \log |f(x)| x^{-\frac{1}{2}} dx$ , then all roots of  $f(z)$  are positive. Two lemmas

play an important role in the proof: (I) Let  $\lambda_\nu \uparrow \infty$ ,  $\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{-2} < \infty$ ,  $\varphi(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - z^2/\lambda_\nu^2)$ .

The statements  $\log \varphi(iy) \sim \pi A |y|$  as  $|y| \rightarrow \infty$  and  $\int_{-\infty}^{\infty} \log |\varphi(x)| x^{-2} dx = -\pi^2 A$  are

equivalent. (II) Under the same conditions the statements  $\log \varphi(iy) \sim \pi A |y| \log |y|$

and  $\int_{-\infty}^y \log |\varphi(x)| x^{-2} dx \sim -\pi^2 A \log |y|$  are equivalent. By using Wiener's Tauberian

theorems the authors derive several results concerning the asymptotic behavior of entire functions, which overlap with analogous results of Titchmarsh. The following result concerning Riemann's zeta function should be mentioned separately:

$\int_1^y x^{-2} \log |\zeta(\frac{1}{2} + ix)| dx = o(\log y)$ . In Note VI the authors give solutions of two

problems proposed by Pólya, one of them being taken in essentially more general form: If  $0 < m_n \uparrow \infty$ ,  $\lim_{m_n} \frac{n}{m_n} > 1$ , and if  $f(x) \in L_2$  over  $(-\pi, \pi)$  while

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{\pm i m_n x} dx = 0$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , then  $f(x)$  vanishes almost everywhere. In

Note VII the authors prove: Let  $K(x) \in L$  over  $(0, \infty)$ . Let  $Q(x)$  be the solution

of  $Q(x) + K(x) = -\int_0^x K(x - \xi) Q(\xi) d\xi$ . A necessary and sufficient condition that

$Q \in L$  is that  $(\dagger) k(w) = \int_0^{\infty} K(\xi) e^{-w\xi} d\xi \neq -1$ ,  $\Re(w) \geq 0$ . As an application it

follows: Let  $F(x)$  be measurable and bounded over every finite range. Let

$(!) F(x) + \int_0^x K(x - \xi) F(\xi) d\xi \rightarrow s$  or  $x \rightarrow \infty$ . Then if  $(\dagger)$  is satisfied we have

$(!!) F(x) \rightarrow s(1 + \int_0^{\infty} K(\xi) d\xi)$ . Conversely let  $K(x) \in L$ , and let  $(!)$  imply  $(!!)$  for

every  $F(x)$  satisfying the conditions above. Then  $(\dagger)$  is true. J. D. Tamarkin.

Moursund, A. F.: On a method of summation of Fourier series. II. Ann. of Math., II. s. 34, 778-798 (1933).

This paper, an extension of the author's earlier paper [Ann. of Math. II s. 33, 773-784 (1932); this Zbl. 5, 353], deals primarily with summation of the  $p^{\text{th}}$  derived series of the Fourier series. A summation method, the  $N_{qp}$  method ( $p = 0, 1, 2, \dots$ ), which includes by specialization of its kernel the Riesz equivalent of the Cesàro method,  $(C, p + \delta)$ ,  $0 < \delta \leq 1$ , is defined; and it is shown that at a point where the  $p^{\text{th}}$  generalized derivative (in the sense of de la Vallée-Poussin) of a Lebesgue integrable

function exists the  $p^{\text{th}}$  derived series of the Fourier series generated by the function is summable to the value of that derivative (I) by the  $N_{q_0}$  method and (II) by superimposing upon the Riesz method,  $(R, p)$ , the  $N_{q_0}$  method. Theorems are given concerning the  $N_{q_0}$  and the  $N_{q_1}$  summability of Fourier and conjugate Fourier series. All theorems include as special cases well known results concerning Cesàro summability.

*J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

**Ferenczi, Zoltán:** Über die Anwendungen eines Zygmundschen Summabilitäts-satzes. Mat. természett. Értes. 49, 251—259 u. dtsh. Zusammenfassung 260—262 (1933) [Ungarisch].

Es sei entweder  $a_n = O(n^\gamma)$ ,  $b_n = O(n^\gamma)$ ,  $\gamma > -1$ , oder  $a_n = o(n^\gamma)$ ,  $b_n = o(n^\gamma)$ ,  $\gamma > 0$ , ferner  $k$  ganz,  $k > \gamma + 1$ . Ist die aus (\*):  $\sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  durch  $k$ -malige Integration gewonnene stetige Funktion  $F(x)$  in  $(a, b)$   $k$ -mal differenzierbar und  $F^{(k)}(x)$  beschränkt, so ist (\*) in jedem abgeschlossenen inneren Teilintervall  $(a', b')$  von  $(a, b)$  gleichmäßig  $(C, \gamma)$ -beschränkt. Im zweiten Falle ist (\*) in  $(a', b')$  fast überall summierbar  $(C, \gamma)$ . Dieser Satz stellt eine Erweiterung eines Satzes von Zygmund dar [Math. Z. 24, 99—104 (1926)]; er kann noch durch Einführung einer Hilfsfunktion  $\lambda(x)$  und Betrachtung von  $[\lambda(x) F(x)]^{(k)}$  wie bei Zygmund verallgemeinert werden. Schließlich folgen Anwendungen auf Potenzreihen. *Szegő* (Königsberg, Pr.).

**Ferenczi, Zoltán:** Über ein notwendiges und hinreichendes Summabilitätskriterium. Mat. természett. Értes. 49, 263—275 u. dtsh. Zusammenfassung 276 (1933) [Ungarisch].

Die Koeffizienten der im vorsteh. Ref. betrachteten trigonometrischen Reihe (\*) mögen die erste dort angeführte Bedingung erfüllen (d. h.  $\gamma > -1$ ) und  $k$  sei  $> \gamma + \frac{1}{2}$ . Notwendig und hinreichend für die  $C$ -Summierbarkeit einer gewissen Ordnung von (\*) ist die Existenz von zwei positiven Zahlen  $r$  und  $\varepsilon$  derart, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} F(t) \frac{d^k}{dt^k} [s_n^{(r)}(t-x)] dt$$

existiert und endlich ist. Hier bedeutet  $s_n^{(r)}(t)$  die  $n$ -te Cesàrosche Teilsumme  $r$ -ter Ordnung von

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nt \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin nt,$$

für  $k \equiv 0$  bzw.  $1 \pmod{2}$ . Es folgen Anwendungen dieses Kriteriums insbesondere auf Potenzreihen.

*Szegő* (Königsberg, Pr.).

**Rey Pastor, J.:** Applications des algorithmes linéaires de convergence et de sommation. Sonderdruck aus: Rend. Semin. mat. fis. Milano 7, 32 S. (1933) [Spanisch].

Ce Mémoire reproduit une conférence dans laquelle l'auteur a exposé son point de vue sur le développement de la théorie des procédés de sommation. — Contrairement à l'opinion de Borel, Knopp, etc., l'auteur estime que les procédés de sommation par moyennes („algor. de convergence“) forment une classe de procédés moins vaste que celle des procédés de sommation par facteurs de convergence („algor. de sommation“). Les arguments sur lesquels l'auteur base sa conviction ne semblent toutefois pas être, à l'avis du soussigné, absolument persuasifs. — L'auteur considère que le but de la théorie ne doit pas être l'étude de procédés particuliers de sommation, mais plutôt celui de l'étude générale de ces procédés, afin d'obtenir la possibilité de choisir, pour chaque série donnée, le procédé le plus apte à sa sommation. Ceci ne paraît possible qu'à condition de résoudre au préalable le problème des moments, dans sa forme la plus générale! Toutefois, l'auteur donne à ce sujet des indications intéressantes (surtout au point de vue des calculs numériques.) — Dans les trois derniers paragraphes l'auteur expose comment les théorèmes généraux sur les procédés de sommation permettent d'obtenir très facilement de nombreux théorèmes connus de la théorie des limites, tout comme la plupart des théorèmes sur les principales méthodes de sommation, et de nombreux théorèmes sur les fonctions analytiques. *Vlad. Bernstein* (Milano).

# Hallenbach, Franz: Zur Theorie der Limitierungsverfahren von Doppelfolgen.

Bonn: Diss. 1933. 100 S.

Im engen Anschluß an F. Hausdorff (Math. Z. 9) werden die Hausdorffschen Summationsmethoden (S.M.) auf Doppelfolgen übertragen. Ein Satz von G. Robison (Trans. Amer. Math. Soc. 28) über konvergenzerhaltende Matrizen für beschränkte Doppelfolgen bildet die Grundlage der Untersuchung, welche in drei Teile zerfällt. Im ersten Teil (S. 1—54) werden S.M. betrachtet, welche auf Momentfolgen der Gestalt

$$\mu_{mn} = \int_0^1 \int_0^1 u^m v^n d^2 \omega(u, v), \quad \left. \begin{array}{l} \omega(u, v) \text{ von beschränkter Schwankung,} \\ \omega(0, v) = \omega(u, 0) = 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

führen. Dieser schon von C. R. Adams untersuchte Fall (dies. Zbl. 7, 117) führt auf folgendes Ergebnis. Momentfolgen (1) und  $B$ -Folgen (d. h. die entsprechenden Matrizen führen beschränkte Folgen in ebensolche über) sind identisch; (1) ist dann und nur dann eine (reine)  $C$ -Folge, wenn  $\omega(u, +0) = \omega(+0, v) (= 0)$ ,  $0 < u, v \leq 1$ . Dabei wird, unabhängig von T. H. Hildebrandt und dem Ref. (Zbl. 6, 402), das Momentenproblem (1) mitgelöst. Es werden ferner zwei Arten von Cesàro- und Hölder-S.M.  $C_{\alpha\beta}$ ,  $C_\alpha$ ,  $H^{\alpha\beta}$  und  $H^\alpha$  untersucht, deren Multiplikatorfolgen  $\mu_{mn}$

$$\binom{m+\alpha}{m}^{-1} \binom{n+\beta}{n}^{-1}, \quad \binom{m+n+1}{\alpha}^{-1}, \quad (m+1)^{-\alpha} (n+1)^{-\beta} \text{ bzw. } (m+n+1)^{-\alpha}$$

sind. Dieselben sind für  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$  konvergenzerhaltend, und die Äquivalenzsätze  $C_{\alpha\beta} \approx H^{\alpha\beta}$ ,  $C_\alpha \approx H^\alpha$  gelten für  $\alpha > -1$ ,  $\beta > -1$ . Ihre Stärke wächst mit  $\alpha$  oder  $\beta$ , ferner ist  $H^{\alpha\beta} > H^\gamma$  für  $\alpha \geq \gamma$ ,  $\beta \geq \gamma$ . Der zweite Teil (S. 55—74) ist den S.M. gewidmet, die nach dem Hausdorffschen Vorgang mit Momentfolgen der Gestalt

$$\mu_{mn} = \int_0^1 \int_0^1 u^t v^n d^2 \omega(u, v)$$

zusammenhängen. Für  $t_0 = \tau_0 = 0$ ,  $t_m, t_n > 0$ ,  $\sum t_m^{-1} = \sum \tau_m^{-1} = \infty$  ( $m, n \geq 1$ ) lauten die Ergebnisse für  $B$ - und  $C$ -Folgen wörtlich wie im Fall (1). Die sich hier ergebenden Beziehungen zwischen total monotonen (t. m.) Folgen  $\mu_{mn}$  bezüglich zweier Folgen  $t_m, \tau_n$  und t. m. Funktionen  $\mu(t, \tau)$  sind in einer Arbeit des Ref. (dies. Zbl. 6, 399) enthalten. Der dritte Teil (Anhang, S. 75—100) ist, abgesehen von einer kurzen Betrachtung über Nörlund-S.M., dem Momentenproblem

$$\mu_m = \int_0^1 u^t d\psi(u), \quad \psi(u) \text{ monoton wachsend,} \quad (2)$$

gewidmet. Für  $t_0 = 0$ ,  $t_m > 0$ ,  $\sum t_m^{-1} = \infty$  sind, nach Hausdorff, nach den  $t_m$  t. m. Folgen  $\mu_m$  und Momentfolgen (2) identisch. Für  $\sum t_m^{-1} < \infty$  gilt für t. m. Folgen eine von (2) verschiedene charakteristische Darstellung (Schoenberg, Trans. Amer. Math. Soc. 34, 616); (2) gibt zwar t. m. Folgen, aber nicht alle. Der Verf. beweist nun im Anschluß an M. Riesz, daß (2) dann und nur dann lösbar ist, wenn die Folge  $\mu_{mn}$  im Gebiet der Polynome  $a_0 u^0 + \dots + a_n u^n$  eine positive lineare Operation definiert. Ferner wird mit Hilfe der Rieszschen Funktion  $\varrho(\theta)$  die Bestimmtheit des Problems untersucht. Bekanntlich ist (2) immer bestimmt, falls  $\sum t_m^{-1} = \infty$ . Verf. zeigt, daß es, falls  $\sum t_m^{-1} < \infty$ , immer sowohl bestimmte als auch unbestimmte Probleme gibt. Besonders interessant ist folgendes Ergebnis: Es sei  $\psi(u)$  in (2) eine monotone Treppenfunktion. 1. Falls  $\psi(u)$  keine nichtabbrechende Folge von wachsenden Sprungstellen besitzt, so ist das Problem (2) bestimmt. 2. Falls  $\psi(u)$  eine solche Folge von Sprungstellen besitzt, so gibt es entsprechende Exponentenfolgen  $t_m (\rightarrow \infty)$ , mit welchen das Problem (2) unbestimmt wird.

I. J. Schoenberg (Princeton).

Sestini, Giorgio: Sulle serie lacunari di polinomi di Legendre. Ist. Lombardo, Rend. II. s. 66, 689—696 (1933).

Extension, to Legendre series, of two theorems of Zygmund: I. If

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k P_{n_k}(\cos \gamma), \quad n_{k+1}/n_k > q > 1 \quad (*)$$

converges at all points of a set  $E_1$  of positive measure  $e_1$  contained in  $(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$ ,  $0 < 2\varepsilon < \pi$ , then (\*) is a Fourier-Legendre series of a function of  $L_2$ . II. If (\*) converges at all points of an interval  $(a, b)$  interior to  $(0, \pi)$  then (\*) converges there absolutely. The proof is based on the lemma: With the notation of theorem I there exists an integer  $M_1$  such that ( $\alpha_k$  are arbitrary)

$$\int_{E_1} |T_{M,N}(\gamma)| d\gamma > C \left[ \sum_{k=M}^N \frac{2a_k^2}{2n_k + 1} \right]^{1/2}, \quad T_{M,N}(\gamma) = \sum_{k=M}^N a_k P_{n_k}(\cos \gamma), \quad N > M \geq M_1,$$

where  $C$  depends only on  $q$  and  $e_1$ . This is an extension of the analogous result established previously by the author for trigonometric polynomials. *J. D. Tamarkin.*

**Banach, Stefan:** Sur les séries lacunaires. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A Nr 4/8, 149—154 (1933).

This paper contains an interesting contribution to the general theory of orthogonal series. — Theorem 1. From any bounded orthogonal and normal set of functions  $\{x_n(t)\}$  a subset  $\{x_{n_k}(t)\}$  may be chosen so that (C) the series  $\sum_k \alpha_k x_{n_k}(t)$  converge in the mean of any order  $p \geq 1$  whenever  $\sum_k |\alpha_k|^2 < \infty$ .

The very elegant proof of this theorem is based on the following elementary inequality previously established by the author (*Studia math.* 2, 51—57 (1930)): if  $x(t)$  and  $y(t)$  are two functions of integrable power  $p > 1$  in  $(0, 1)$  then there exists a positive constant  $A$  independent of  $x(t)$  and  $y(t)$  such that

$$\int_0^1 |x(t) + y(t)|^p dt \leq \int_0^1 |x(t)|^p dt + A \left[ \int_0^1 |x(t)|^{p-1} \cdot \operatorname{sgn} x(t) \cdot y(t) dt + \int_0^1 |y(t)|^p dt + \sum_{i=2}^p \int_0^1 |x(t)|^{p-i} |y(t)|^i dt \right].$$

Theorem 2. Let, in addition to the assumptions of Theorem 1,  $\{x_n(t)\}$  be a complete set. Then for any subset  $\{x_{n_k}(t)\}$  the property (C) implies the following: if  $y(t)$  is a function of  $L^p$  for a  $p > 1$  and if its formal development with respect to the orthogonal set  $\{x_n(t)\}$  is of the form  $\sum_k \beta_k x_{n_k}(t)$ , then it belongs to  $L^p$  for any  $p \geq 1$ . *Saks (Warszawa).*

**Mambriani, Antonio:** Sulla sommazione di certe serie di potenze e su una trasformazione di Pincherle. Boll. Un. Mat. Ital. 12, 296—302 (1933).

A simplified derivation of a transformation formula due to Pincherle,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n k_n x^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Delta_{\nu}^x a_0}{\nu!} D_{\nu}^x \varphi\left(\frac{x}{z}\right), \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n,$$

$$\Delta_{\nu}^x a_0 = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (-1)^{n-\nu} a_{\nu} z^{\nu},$$

with applications to several special cases known in the literature. *J. D. Tamarkin.*

### Differentialgleichungen :

**Whyburn, William M.:** Generalized Riccati differential equations. Tôhoku Math. J. 38, 447—450 (1933).

Verf. zeigt in Verallgemeinerung der Riccatischen Differentialgleichung, daß die Lösungen der Matrixdifferentialgleichung

$$F_k(U) = R(x), \quad (I)$$

wobei  $F_k(U)$  durch die Relationen

$$F_0(U) \equiv U, \quad F_m(U) \equiv \frac{dF_{m-1}(U)}{dx} + F_{m-1}(U) \cdot U \quad (m = 1, 2, \dots)$$

rekursiv definiert und  $R(x)$  eine quadratische Matrix ist, deren  $n^2$  Elemente stetige Funktionen von  $x$  im Intervall  $J$  sind, in folgende Beziehungen zur Matrixdifferentialgleichung

$$\frac{d^{(k+1)}Y}{dx^{(k+1)}} = R(x) \cdot Y \quad (\text{II})$$

steht: 1. Notwendig und hinreichend, daß (I) eine Lösung besitzt, ist, daß (II) eine Lösung mit von Null verschiedener Determinante in  $J$  besitzt. — 2. Ist  $Y$  eine Lösung von (II), deren Determinante nicht identisch verschwindet, so ist  $U = \frac{dY}{dx} \cdot Y^{-1}$  Lösungsmatrix von (I) auf der Punktmenge, auf der die Determinante von  $Y$  von Null verschieden ist. — Verf. leitet weiterhin für spezielle Matrizen  $R$  Sätze über die Matrixdifferentialgleichungen (I) und (II) ab. *Wegner* (Darmstadt).

**Toyoda, Koshichi:** Green's functions in space of one dimension. *Tôhoku Math. J.* 38, 343—355 (1933).

Aufstellung der Greenschen Funktion für die Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung  $y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = 0$  und die folgenden Randbedingungen: In den Punkten  $x_1, x_2, \dots, x_m$  mit  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq b$  gelte

$$\sum_{k=1}^m [\alpha_{ik}^0 y(x_k) + \alpha_{ik}^1 y'(x_k) + \dots + \alpha_{ik}^{n-1} y^{(n-1)}(x_k)] = 0. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

*Rellich* (Göttingen).

**Siddiqi, M. Raziuddin:** On an infinite series of integrals involving Sturm-Liouville Eigen-functions. *Bull. Acad. Sci. Allahabad* 3, 1—10 (1933).

Es seien  $\varphi_n(x)$ ,  $\lambda_n$  Eigenfunktionen und Eigenwerte von  $(p y')' + \lambda y = 0$ ;  $y(0) = y(\pi) = 0$ . Setzt man  $a_{jk}^n = \int_0^\pi \varphi_j \cdot \varphi_k \varphi_n dx$  und  $b_{kj}^n = \int_0^\pi \varphi_k \varphi_j' \varphi_n dx$ , dann konvergiert

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} |a_{jk}^n|}{\lambda_j \lambda_k} \quad \text{und} \quad \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} |b_{kj}^n|}{\lambda_k \lambda_j^{3/2}}$$

gleichmäßig für alle  $j, k \geq 1$ .

*Rellich* (Göttingen).

**Voros, Eleutherios:** Über eine Differentialgleichung von besonderer Gestalt. *Bull. Soc. Math. Grèce* 14, Nr 2, 63—64 (1933) [Griechisch].

Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + (X - \alpha X_1^{\nu-1}) y + (ky + X_1)^{\nu} = 0,$$

in der  $\nu$  und  $k$  Konstanten,  $\alpha, X, X_1$  Funktionen von  $x$  sind, und zwar  $X_1$  eine Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung

$$\frac{dw}{dx} + Xw - \alpha w^{\nu} = 0,$$

wird durch die Substitution  $ky + X_1 = \omega$  auf die Bernoullische Differentialgleichung

$$\frac{d\omega}{dx} + (X - \alpha X_1^{\nu-1}) \omega + k\omega^{\nu} = 0$$

zurückgeführt.

*Bessel-Hagen* (Bonn).

**Hadamard:** Observation sur une note récente de M. Adamoff. *C. R. Acad. Sci., Paris* 198, 218 (1934).

Vgl. dies. Zbl. 8, 13.

**Andronow, A., und A. Witt:** Zur Stabilität nach Liapunow. *Physik. Z. Sowjetunion* 4, 606—608 (1933).

Die Verf. skizzieren einen Beweis für den folgenden Satz: Ist  $x_i = x_i(t)$  eine periodische Lösung des Differentialsystems  $\dot{x}_i = X_i(x_1, \dots, x_n)$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$  und haben die  $n-1$  nicht notwendig verschwindenden charakteristischen Exponenten negative Realteile (der  $n$ -te Exponent ist notwendig gleich Null), so liegt Liapounoffsche Stabilität vor.

*Wintner* (Baltimore).

**Picard, Émile:** Sur les périodes des intégrales doubles et sur une classe d'équations différentielles linéaires. Ann. École norm., III. s. 50, 393—395 (1933).

Ist  $f(x, y, z, \alpha) = 0$  eine algebraische Fläche, die von einem Parameter  $\alpha$  rational abhängt, so ist jede zu einem im Endlichen gelegenen Zyklus gehörige Periode eines Integrals 2. Gattung

$$J = \iint \frac{Q(x, y, z, \alpha)}{f_z} dx dy \quad (Q: \text{Polynom in allen 4 Argumenten})$$

als Funktion von  $\alpha$  betrachtet, Lösung einer linearen Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten. Denn alle Ableitungen  $\frac{\partial^r J}{\partial \alpha^r}$  sind ebenfalls Integrale 2. Gattung, und es läßt sich nach der allgemeinen Picardschen Theorie der Doppelintegrale 2. Gat-

tung eine Linearkombination  $\sum_{v=0}^{\mu} A_v(\alpha) \frac{\partial^v J}{\partial \alpha^v}$  finden, die ein periodenloses Doppelintegral 2. Gattung darstellt. Kähler (Königsberg, Pr.).

**Wazewski, T.:** Sur l'unicité et la limitation des intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 372—376 (1933).

**Hamburger, Hans:** Ricerche su un'equazione a derivate parziali i cui coefficienti sono periodici rispetto a una variabile. Rend. Semin. mat. Roma, III. s. 1, 23—25 (1933).

**Nikodym, Otton:** Remarques sur la note de M. Niklibore concernant les systèmes complètement intégrables d'équations aux différentielles totales. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A Nr 4/8, 137—144 (1933).

W. Niklibore a établi l'existence d'une intégrale passant par le point  $(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$ , du système complètement intégrable

$$dy_\alpha = \sum_{i=1}^n a_{\alpha i}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) dx_i, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m)$$

les fonctions  $a_{\alpha i}$  appartenant au type  $(C^1)$ , c.-à-d. admettant les dérivées partielles continues par rapport à tous les arguments, au voisinage du point initial [Studia Math. 1, 41—49 (1929)]. La note présente contient la démonstration sous les mêmes conditions de l'existence d'une intégrale générale (locale) normale du même système,

$$y_\alpha = Y_\alpha(x_1, \dots, x_n; x'_1, \dots, x'_n; y'_1, \dots, y'_m), \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m)$$

les fonctions  $Y_\alpha$  étant du type  $(C^1)$  et vérifiant les conditions:

$$Y_\alpha(x'_1, \dots, x'_n; x'_1, \dots, x'_n; y'_1, \dots, y'_m) = y'_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

On en déduit que les fonctions

$$Y_k(x_1^0, \dots, x_n^0; x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \quad (k = 1, \dots, m)$$

forment un système fondamental de solutions du système Jacobien correspondant:

$$X_i(F) \equiv \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^m a_{\alpha i} \frac{\partial F}{\partial y_\alpha} = 0. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

W. Stepanoff (Moskau).

**Kuren'skyj, K.:** Die Grundformeln zur Integration der Gleichungen mit partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung mit mehreren abhängigen und unabhängigen Variablen. II. Tl. S.-B. math.-naturwiss.-ärztl. Sekt., ukrain. Ševčenko-Ges. Wiss. Lemberg H. 18, 13—35 (1933).

Die Bestimmung einer vollständigen Lösung des Systems von 2 partiellen Differentialgleichungen  $F_i(x, y, z, z', p, q, p', q', r, s, t, r', s', t') = 0$  ( $i = 1, 2$ ) 2. Ordnung mit 2 unbekannten Funktionen  $z, z'$  und den unabhängigen Veränderlichen  $x, y$  ( $\partial z / \partial x = p, \partial z' / \partial x = p'$  usw.) wird auf die Integration eines Systems totaler Differentialgleichungen zurückgeführt, wenn es gelingt 4 Funktionen  $\Phi_k$  ( $k = 1, \dots, 4$ ) von  $x, y, z, z', \dots, t'$  so zu bestimmen, daß die Funktionaldeterminante von  $F_i, \Phi_k$  nach

$r, s, t, r', s', t'$ , nicht verschwindet und ferner das Gleichungssystem  $F_i = 0$ ,  $\Phi_k = a_k$  ( $= \text{Const.}$ ) vollständig integrierbar ist. Zur Bestimmung von  $\Phi_k$  findet der Verf. im allgemeinen Systeme von 4 simultanen linearen partiellen Gleichungen 1. Ordnung. Beim Eintreten besonderer Umstände (z. B. wenn die Funktionen  $F_i$  nicht von  $s$  und  $t$  abhängen) ergeben sich jedoch Vereinfachungen, die besprochen werden. *Borówka.*

**Mieghem, J. van:** Über lineare partielle Differentialgleichungen 2ter Ordnung mit  $n$  unabhängig Veränderlichen. Wis- en Natuurkdg Tijdschr. 6, 266—278 u. franz. Zusammenfassung 278 (1933) [Holländisch].

Verf. zeigt, daß jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades mit  $n$  unabhängigen Veränderlichen, welche nicht homogen ist, in eine solche mit  $n + 1$  unabhängigen Veränderlichen übergeführt werden kann. Für die Koeffizienten werden Bedingungen abgeleitet. Für lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung wird ein Variationsausdruck aufgestellt. Diese Rechnungen werden auf die Wellengleichung (Schrödinger) angewandt. Endlich wird der „Dichte-Ausdruck“ Schrödingers diskutiert. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

**Giraud, Georges:** Sur certains problèmes mixtes, relatifs aux équations linéaires du type elliptique. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 40—42 (1934).

Es handelt sich um folgende Verallgemeinerung der üblichen gemischten Randwertaufgabe bei linearen elliptischen Gleichungen zweiter Ordnung: Der (nicht notwendig zusammenhängende) Rand des betrachteten Bereiches besteht aus zwei Gebieten  $A$  und  $B$  mit gemeinsamer Begrenzung  $C$ . In  $A + C$  sind für die gesuchte Lösung die Randwerte vorgeschrieben, in  $B + C$  eine Bedingung vom Typus der dritten (gemischten) Randwertaufgabe; beide Grenzbedingungen müssen auf  $C$  natürlich übereinstimmen. Dabei ist es möglich, im wesentlichen mit den — sehr allgemeinen — Regularitätsvoraussetzungen aus den früheren Arbeiten des Verf. auszukommen (vgl. insbesondere dies. Zbl. 7, 115). — Das Problem wird auf die Fredholmsche Theorie zurückgeführt. Die einzelnen Schritte des Beweisganges werden angegeben.

*Willy Feller* (Kopenhagen).

**Nikodym, Otton:** Sur une classe de fonctions considérée dans l'étude du problème de Dirichlet. Fundam. Math. 21, 129—150 (1933).

Verf. gibt einige neue Eigenschaften der Funktionen von B. Levi, d. h. der Funktionen mehrerer Veränderlichen, welche von B. Levy und G. Fubini bei der Lösung des Dirichletschen Problems gebraucht wurden [Rend. Circ. mat. Palermo 22, 303 (1906) und 23, 58 (1907).]

*A. Kolmogoroff* (Moskau).

**Nikodym, Otton:** Sur l'existence du potentiel uniforme sur une surface de Riemann quelconque. Bull. Soc. Math. France 61, 220—245 (1933).

Es ist ein natürlicher Gedanke, das ursprüngliche Dirichletsche Prinzip durch Anwendung moderner Hilfsmittel richtigzustellen. Tatsächlich braucht man dazu nur die einfachsten Sätze aus der Theorie der abstrakten Hilbertschen Räume, und kann die künstlichen und darstellerisch schwerfälligen Hilfsmittel, die z. B. Weyl verwendet hat, ganz entbehren. Die Untersuchungen beziehen sich direkt auf die allgemeinere elliptische Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \gamma \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \gamma \frac{\partial u}{\partial y} \right) - qu = 0,$$

wodurch die Behandlung ja nicht sehr wesentlich kompliziert wird. Die verwendeten Sätze aus der Theorie der Hilbertschen Räume werden vollständig bewiesen.

*Ahlfors* (Helsingfors).

**Košliakov, N. S.:** Sur l'application de la méthode de Green à la résolution du problème fondamentale de gravimétrie. Trav. Inst. phys.-math. Stekloff 4, 71—76 (1933) [Russisch].

Unter Hauptproblem der Gravimetrie wird folgendes Problem verstanden. Es wird eine außerhalb der Kugel vom Radius  $R$  harmonische Funktion  $U$  gesucht, welche

auf der Kugel der Randbedingung  $\frac{dU}{dn} + \frac{2}{R} U = f(\vartheta, \varphi)$  genügt. Die Funktion  $U$  soll überdies für  $r \rightarrow \infty$  mindestens wie  $1/r^2$  abnehmen; Voraussetzung ist, daß die Mittelwerte von  $f, xf, yf, zf$  über die Kugeloberfläche verschwinden. — Verf. konstruiert für dieses Problem eine Greensche Funktion, die sich in endlicher Form ausdrücken läßt. Die Lösung hat die Form eines bestimmten Integrals und ist mit der von Vening-Meinesz gegebenen Lösung identisch. *V. Fock (Leningrad).*

**Fantappiè, Luigi: Integrazione con quadrature dei sistemi a derivate parziali lineari e a coefficienti costanti in due variabili, mediante il calcolo degli operatori lineari.** Rend. Circ. mat. Palermo 57, 137—194 (1933).

In früheren Arbeiten hat der Autor aus einem linearen Operator  $A$  in bestimmter Weise den Operator  $f(A)$  gewonnen, wo  $f(\lambda)$  eine analytische Funktion von  $\lambda$  bedeutet. Im ersten Teil dieser Arbeit wird allgemein einer endlichen Anzahl von vertauschbaren Operatoren  $A_1, A_2, \dots, A_r$  und einer analytischen Funktion  $g(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  der Operator  $g(A_1, A_2, \dots, A_r)$  zugeordnet, und es wird auseinandergesetzt, wie sich die früheren Begriffsbildungen und Behauptungen auf diesen allgemeinen Fall übertragen. Insbesondere ergibt sich die explizite Lösbarkeit eines Systems von Funktionalgleichungen der Form:

$\sum_{k=1}^m F_{ik} z_k = \varphi_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$  mit  $F_{ik} = g_{ik}(A_1, A_2, \dots, A_r)$ ;

$\varphi_i$  bekannt,  $z_k$  gesucht. — Im zweiten Teil wird als Anwendung das Cauchy-Kowalewskysche Anfangswertproblem explizite (mit Hilfe von Quadraturen) gelöst für ein System der Form

$$\frac{\partial z_i}{\partial x} + \sum_{k=1}^n a_{ik} \frac{\partial z_k}{\partial y} = \sum_{k=1}^n b_{ik} y_k + f_i(x, y) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$a_{ik}, b_{ik}$  konstant,  $f_i(x, y)$  regulär analytisch in einer Umgebung der Anfangskurve; darüber hinaus wird die Voraussetzung gemacht, daß die Matrix  $((a_{ik}))$  in eine Diagonalmatrix transformiert werden kann, d. h. daß sich das System durch Einführung neuer gesuchter Funktionen  $\zeta_k$  schreiben läßt in der Form

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial x} + \mu_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial y} = \sum_{k=1}^n b'_{ik} \zeta_k + \varphi_i(x, y);$$

das System soll also nicht „parabolisch“ sein. (Man beachte, daß gleichwohl die Charakteristiken mehrfach sein dürfen.) Um zur gewünschten Lösung zu gelangen, wird zunächst das Differentialgleichungssystem in ein Integralgleichungssystem umgeschrieben und auf dieses System unmittelbar der allgemeine Satz über Funktionalgleichungen aus Teil I angewendet. Sind die Koeffizienten des ursprünglichen Differentialgleichungssystems und die Zahlen  $\mu$  reell, so läßt sich das Verfahren auch im nichtanalytischen Fall durchführen. *Rellich (Göttingen).*

**Fantappiè, L.: Soluzione con quadrature del problema di Cauchy-Kowalewsky per le equazioni di tipo parabolico.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 897—902 (1933).

Das Cauchy-Kowalewskysche Anfangswertproblem für  $z_{xx} - az_y = f(x, y)$  verlangt, eine Lösung  $z(x, y)$  dieser Gleichung zu finden, für die  $z(x_0, y) = \varphi_0(y)$  und  $z_x(x_0, y) = \varphi_1(y)$  vorgeschriebene Werte annimmt;  $a$  konstant,  $f(x, y), \varphi_0(y), \varphi_1(y)$  gegebene in einer Umgebung des Punktes  $x_0, y_0$  reguläre analytische Funktionen. Diese Lösung wird explizite mit Hilfe von Quadraturen angegeben:

$$\begin{aligned} z(x, y) &= \varphi_0(y) + (x - x_0) \varphi_1(y) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \int_{x_0}^x d\tau \int_{x_0}^{\tau} e^{\frac{x-\tau}{\lambda}} \{ \lambda f(t, y + a\lambda(\tau - t)) + \varphi_1(y + a\lambda(\tau - t)) \} dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \int_{x_0}^x e^{\frac{x-\tau}{\lambda}} \varphi_0(y + a\lambda(\tau - x_0)) d\tau, \end{aligned}$$

wobei  $C_0$  eine den Punkt  $\lambda = 0$  umschließende Kurve der komplexen  $\lambda$ -Ebene bedeutet. (Es genügt übrigens  $f(x, y)$  analytisch in  $y$ , stetig in  $x$  vorzusetzen.) *Rellich.*

**Fantappiè, L.: Integrazione per quadrature dell'equazione parabolica generale, a coefficienti costanti.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 266—270 (1933).

Verallgemeinerung des im vorangehenden Referat beschriebenen Resultates auf die Differentialgleichung  $z_{xx} + az_x + bz_y + cz = f(x, y)$ ;  $a, b, c$  konstant. *Rellich.*

**Fantappiè, Luigi: Intégration par quadratures de l'équation parabolique générale, à coefficients constants sur les caractéristiques.** C. R. Acad. Sci., Paris 197, 969—970 (1933).

The author shows that his method previously developed to solve Cauchy's problem for linear partial equations with constant coefficients, can also be applied to solve the parabolic equation  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a(y) \frac{\partial z}{\partial x} + b(y) \frac{\partial z}{\partial y} + c(y)z = f(x, y)$  with the initial conditions

$z(x_0, y) = \varphi_0(y)$ ,  $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=x_0} = \varphi_1(y)$ , the total amount of necessary quadratures reducing to five. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

**Kodaira, Yoſio: Periodic heating and cooling of a semi-infinite solid having conductivity, specific heat and density varying with temperature.** Geophys. Mag. 7, 51—69 (1933).

Integration einer verallgemeinerten (nichtlinearen) Wärmeleitungs-Differentialgleichung

$$c_0 \varrho_0 (1 + \alpha u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k_0 (1 + \beta u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (c_0, \varrho_0, \alpha, \beta, k_0 = \text{konst.})$$

mit den Randbedingungen

$$(u)_{x=0} = u_0 + \sum_1^\infty A_\nu \cos(\nu p t + \varepsilon_\nu), \quad (u)_{x=\infty} \neq \infty$$

durch eine Funktionenreihe  $u = \sum_s^\infty u_s$ , in der die  $u_s$  nacheinander aus linearen (und für  $s \neq 1$  inhomogenen) Differentialgleichungen mit den Randbedingungen

$$(u_s)_{x=0} = A_s \cos(s p t + \varepsilon_s), \quad (u_s)_{x=\infty} \neq \infty$$

berechnet werden.

*H. Ertel* (Berlin).

**Kodaira, Yoſio: Periodic heating and cooling of a semi-infinite solid having conductivity, specific heat and density varying with depth.** Geophys. Mag. 7, 71—86 (1933).

Integration der linearen Wärmeleitungsgleichung

$$c_0 \varrho_0 (1 + \alpha z) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ k_0 (1 + \beta z) \frac{\partial u}{\partial z} \right] \quad (c_0, \varrho_0, k_0, \alpha, \beta = \text{konst.})$$

mit den Randbedingungen

$$(u)_{z=0} = A_0 + \sum_1^\infty A_\nu \cos(\nu p t + \varepsilon_\nu), \quad (u)_{z=\infty} = 0$$

durch den Ansatz  $u = \sum_s^\infty u_s$ , worin die  $u_s$  nacheinander aus linearen und für  $s \neq 0$  inhomogenen Differentialgleichungen mit den Randbedingungen

$$(u_s)_{z=0} = \delta_{os} A_s \cos(s p t + \varepsilon_s), \quad (u_s)_{z=\infty} = 0; \quad \delta_{os} = \begin{cases} 1, & s = 0 \\ 0, & s \neq 0 \end{cases}$$

bestimmt werden. Für  $\alpha = \beta$  wird noch die Lösung durch Zylinderfunktionen (asymptotische Entwicklung) gegeben.

*H. Ertel* (Berlin).

**Ackermann, G.: Eine neue Methode zur Integration der linearen, partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung vom hyperbolischen Typus.** Z. angew. Math. Mech. 13, 416—421 (1933).

Die Differentialgleichung  $u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0$  ( $a, b, c$  stetig differenzierbare Funktionen von  $x, y$ ) wird ersetzt durch das System

$$u_x + b u = v, \quad v_y + a v = (ab + b_y - c) u.$$

Jede dieser beiden Gleichungen läßt sich unter Verwendung von willkürlichen Funktionen explizit integrieren. Auf diese Weise werden die beiden Anfangswertprobleme der Ausgangsgleichung (Anfangsdaten gegeben auf einer nirgends charakteristischen Kurve und Anfangsdaten gegeben auf  $x = 0$  und  $y = 0$ ) auf Integralgleichungen vom Volterraschen Typus zurückgeführt. *Rellich* (Göttingen).

**Winants, Marcel:** Quelques propriétés des équations hyperboliques du deuxième et du troisième ordre. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 19, 1034—1043 (1933).

Pour l'équation linéaire totalement hyperbolique du troisième ordre en  $z(x, y)$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \omega(x, y)$$

l'auteur résout explicitement un certain problème aux limites caractéristiques en se donnant  $z(x, 0)$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}(x, 0)$  et  $z(0, y)$ . — Quelques remarques sur l'existence de solutions  $z$  de l'équation dont une fonction arbitraire sera encore solution. *Hans Lewy*.

**Germaey, R.-H.-J.:** Sur l'existence des intégrales des systèmes d'équations intégral-différentielles du premier ordre, de forme résolue, à plusieurs variables indépendantes. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 2, 190—194 u. 212—217 (1933).

Des Verf. frühere Ergebnisse über Cauchysche Anfangswertprobleme für Integro-Differentialgleichungen (dies. Zbl. 7, 406) werden hier dahin verallgemeinert, daß statt einer Gleichung mit einer unbekannten Funktion ein Gleichungssystem mit  $m$  unbekannten Funktionen von  $n$  Veränderlichen betrachtet wird. Die Formeln sind dabei komplizierter, das Verfahren ist aber wesentlich dasselbe. *G. Cimmino* (Napoli).

### Spezielle Funktionen:

**Cibrario, Maria:** Sui polinomii di Bernoulli e di Eulero. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 207—214 (1933).

This note continues a study begun earlier [Sui numeri di Bernoulli e di Eulero, Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 110—118 (1933); this Zbl. 7, 413]; a large number of known relations between the polynomials are obtained by considering the polynomials as coefficients in series of the form  $\sum a_n(x) t^n/n!$  *C. R. Adams*.

**Cibrario, Maria:** Su alcune generalizzazioni dei numeri e dei polinomii di Bernoulli e di Eulero. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 275—279 (1933).

In this third note of a sequence (see the foregoing abstract) the author applies the same method to the study of the numbers and polynomials indicated in the title.

*C. R. Adams* (Providence).

**Meixner, J.:** Orthogonale Polynomsysteme mit einer besonderen Gestalt der erzeugenden Funktion. J. London Math. Soc. 9, 6—13 (1934).

This paper discusses properties of polynomials  $P_n(x)$  defined by the relation

$$e^{x \cdot u(t)} f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{n!} t^n,$$

where  $f(t)$  is a power series in  $t$  with the constant term equal to unity, and  $u(t)$  a power series with constant term zero, the coefficient of  $t$  being unity. These polynomials are generalizations of the polynomials of Hermite, Laguerre, Euler and Bernoulli. In particular the recurrence formulae for the polynomials are considered.

*W. N. Bailey* (Manchester).

**Watson, G. N.:** Notes on generating functions of polynomials: IV. Jacobi polynomials. J. London Math. Soc. 9, 22—28 (1934).

Defining the polynomials of Jacobi by the formula

$$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{ (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \},$$

the author obtains the sum of the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos 2\varphi) P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos 2\Phi)$$

where

$$c_n = (2n + \alpha + \beta + 1) \frac{n! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}.$$

The sum is first expressed in terms of the integral

$$\int_0^{\infty} J_{\alpha}(z \sin \varphi \sin \Phi) J_{\beta}(z \cos \varphi \cos \Phi) \exp \left\{ -\frac{1}{2} z (t^{-1} - t) \right\} dz$$

and then in terms of an integral (with finite limits) of an elementary function. (III. this Zbl. 7, 411.)

W. N. Bailey (Manchester).

Szegő, G.: Über einige asymptotische Entwicklungen der Legendreschen Funktionen. Proc. London Math. Soc., II. s. 36, 427—450 (1933).

Der Grundgedanke der verwendeten Methode zur asymptotischen Entwicklung besteht (wie in der asymptotischen Entwicklung des Jacobischen Pol. [vgl. dies. Zbl. 7, 203] in der Heranziehung der Besselschen Funktionen. Aus der bekannten Mehlerschen Formel

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\cos(n + \frac{1}{2})t}{\sqrt{2(\cos t - \cos \theta)}} dt \quad (0 < \theta < \pi)$$

leitet der Verfasser zuerst die für  $0 \leq \theta < \theta_0 - \varepsilon$ , ( $\theta_0 = 2(\sqrt{2} - 1)\pi = 0,828\pi$ ),  $0 < \varepsilon < \theta_0$  gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$P_n(\cos \theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(\theta) \frac{J_{\nu}[(n + \frac{1}{2})\theta]}{(n + \frac{1}{2})^{\nu}} \quad (1)$$

ab. Die Koeffizienten  $a_{\nu}(\theta)$  ( $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ) sind ziemlich verwickelte, für  $0 \leq \theta < \pi$  reguläre, elementare Funktionen, von denen die ersten drei berechnet worden sind. Setzt man ferner mit  $p \geq 1$ :

$$P_n(\cos \theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(\theta) \frac{J_{\nu}[(n + \frac{1}{2})\theta]}{(n + \frac{1}{2})^{\nu}} + R_p,$$

so gilt gleichmäßig für  $0 \leq \theta \leq \theta_0 - \varepsilon$ ;  $R_p = O(n^{-p-1})$ . Die Reihe (1) konvergiert also in dem Intervall  $0 \leq \theta < \theta_0 - \varepsilon$  sowohl im gewöhnlichen wie auch im asymptotischen Sinne. Am Ende der Arbeit wird aber gezeigt, daß die asymptotische Entwicklung (1) im ganzen Intervalle  $0 \leq \theta < \pi$ , und zwar gleichmäßig in  $0 \leq \theta \leq \pi - \varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \pi$  Gültigkeit hat. Der Verf. wendet die Entwicklung (1) zuerst an, um das Restglied der Hilbschen Formel

$$P_n(\cos \theta) = \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} J_0[(n + \frac{1}{2})\theta] + \frac{1}{8n} \left( \cotg \theta - \frac{1}{\theta} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin \theta}} \sin \left[ (n + \frac{1}{2})\theta - \frac{\pi}{4} \right] + O(n^{-\frac{5}{2}})$$

zu  $O(n^{-2})$  zu verschärfen. Weiter liefert die Entwicklung (1) einen einfachen Beweis des Gronwallischen Satzes über die Lebesgueschen Konstanten der Laplaceschen

Reihe, nämlich  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt{n} \int_{-1}^{+1} \left| \frac{P_n(x) - P_{n+1}(x)}{1-x} \right| dx = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}}$  und eine sehr kurze Her-

leitung des Kogbetliantz-Bernsteinschen Satzes  $|P_n(\cos \theta) - P_{n+2}(\cos \theta)| < A \sqrt{\frac{\theta}{n}}$ , ( $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ) ( $A$  ist eine positive von  $n$  und  $\theta$  unabhängige Konstante). In den weiteren Paragraphen wird die asymptotische Entwicklung der Legendreschen Funktionen zweiter Art für beliebige komplexe  $z$ -Werte untersucht.

van Veen.

Košliakow, N.: On a certain definite integral connected with the cylindric function  $k_{\nu}(x)$ . C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 1, 103—104 u. engl. Zusammenfassung 104 (1934) [Russisch].

**Lense, Josef:** Über die Nullstellen der Besselfunktionen und ihrer ersten Ableitungen. Jber. Deutsch. Math.-Verein. **43**, 146—153 (1933).

Verf. betrachtet die obengenannten Nullstellen in der komplexen Ebene des Argumentes als Funktion der Ordnung für Besselsche Funktionen erster Art. In mehreren Sätzen wird die Lage der reellen und imaginären Nullstellen als Funktion der Ordnung festgelegt. Die Ableitung geht von der bekannten Potenzreihenentwicklung, den asymptotischen Darstellungen sowie der Differentialgleichung aus. *Strutt.*

**Watson, G. N.:** An infinite integral involving Bessel functions. J. London Math. Soc. **9**, 16—22 (1934).

It is proved that

$$\int_0^{\infty} J_{\mu}(at) J_{\nu}(bt) e^{-ct} dt = \frac{2a^{\mu} b^{\nu} c}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left( \frac{2c \sec \omega}{c^2 \sec^2 \omega + b^2 - a^2 + \sqrt{X}} \right)^{\mu} \left( \frac{2c \sec \omega}{c^2 \sec^2 \omega + a^2 - b^2 + \sqrt{X}} \right)^{\nu} \\ \times \sec^2 \omega \cos(\mu - \nu) \omega \frac{d\omega}{\sqrt{X}},$$

where

$$X \equiv (c^2 \sec^2 \omega + a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b^2, \quad \text{and} \quad R(\mu + \nu + 1) > 0.$$

It will be noticed that the integral on the right has finite limits and the integrand is an elementary function, though complicated in form. From this result the integrals

$$\int_0^{\infty} J_{\mu}(at) J_{\nu}(bt) \cos kt dt$$

and

$$\int_0^{\infty} J_{\mu}(at) J_{\nu}(bt) \sin kt dt$$

are expressed in a similar form.

*W. N. Bailey (Manchester).*

**Humbert, Pierre:** Les fonctions hypergéométriques et le calcul symbolique. Ann. Soc. Sci. Bruxelles A **53**, 103—112 (1933).

Calling the function  $f(p) = p \int_0^{\infty} e^{-px} h(x) dx$ , assuming that it exists, the image of the given function  $h(x)$ , the author discusses the images of certain hypergeometric functions, obtaining very simply such well known results as: the image of

$$x^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{x}) = \frac{1}{p^n} e^{-\frac{1}{p}}$$

and the image of  $J_0(x) = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ . The images of the Laguerre polynomials are dis-

cussed and used to establish the relation  $\frac{\partial \varphi_m}{\partial m} = \int_0^x \varphi_m(x-y) \frac{1-e^y}{y} dy$  (where  $\varphi_m(x)$  is defined by the identity  $e^{-\frac{tx}{1-t}} = (1-t) \sum t^m \varphi_m(x)$ ) and relations such as

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi_m(x)}{m!} = e J_0(2\sqrt{x}).$$

*Murnaghan (Baltimore).*

### **Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:**

**Giraud, Georges:** Sur certaines équations de Fredholm à noyau non borné. Bull. Sci. math., II. s. **57**, 391—401 (1933).

The author continues his investigations of the integral equation

$$\varrho(X) - \lambda \int_E G(X, A) \varrho(A) dV_A = \varphi(X)$$

(the first note appeared ibidem, pp. 327—334, this Zbl. **8**, 17). The author now proves that if his kernel is symmetric or symmetrizable and satisfies the conditions previously imposed concerning the existence of a dominant, then the classical theorems on the

existence, reality and simplicity of the poles of the resolvent remain valid. A simple lemma on the continuity of the characteristic values with respect to a parameter entering in the kernel is the main tool in the proofs. *Hille* (New Haven, Conn.).

**Soula: Sur l'équation intégrale de Laplace et Abel.** Bull. Sci. math., II. s. **57**, 401 bis 419 (1933).

The author proves theorems announced in C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 988—990 (1933) (this Zbl. **6**, 314) concerning the equation  $f(z) = \int_0^1 t^{z-1} h(t) dt$ . For a description of the results see the quoted review. The author has added some results concerning the existence of a solution  $h(t)$  satisfying a Lipschitz condition. — It must be observed, however, that the modern literature on Laplace's integrals, on the moment problem and on completely monotone functions contains a number of results on this question of a sharper nature than those of the author. Thus of the five results mentioned in the previous review, III goes back to Hausdorff [Math. Z. **16**, 220—248 (1923)], V at least to Widder [Trans. Amer. Math. Soc. **31**, 694—743 (1929)], whereas in I, II, and IV the "best" sufficient conditions of this type can be read off from the results of Hille & Tamarkin published in the meantime (this Zbl. **7**, 113 and 8, 9).

*Hille* (New Haven, Conn.).

**Maeda, Fumitomo: On kernels and spectra of bounded linear transformations.** J. Sci. Hiroshima Univ. **3**, 243—273 (1933).

Der Hilbertsche Raum wird wie in früheren Arbeiten [vgl. J. Sci. Hiroshima Univ. **3**, 1—42 (1933); dies. Zbl. **7**, 117] des Verf. als  $L_2(\beta)$ , d. h. durch Mengenfunktionen  $\varphi(E)$  dargestellt mit der Einheitsform

$$(\varphi, \varphi)_\beta = \int_A |D_{\beta(E)} \varphi(a)|^2 d\beta(E),$$

wo die Basis  $\beta(E)$  eine total additive, nicht negative Mengenfunktion bedeutet und  $D$  die Derivation nach ihr kennzeichnet. Es wird zunächst gezeigt, daß sich jede lineare beschränkte Transformation  $T$  vermittelt eines Kernes  $\mathfrak{K}(E, E')$  darstellen läßt in der Form

$$T\varphi(E) = \int_A D_{\beta(E')} \mathfrak{K}(E, a') D_{\beta(E)} \varphi(a') d\beta(E').$$

Insbesondere gehört die Identität zum Kern  $\beta(EE')$ . Weiterhin werden Orthogonalsysteme  $\varphi_U(E)$  betrachtet, die anstatt von einem ganzzahligen Parameter von Mengen  $U$  abhängen. Die  $\varphi_U(E) = \varphi_E(U)$  bilden wieder einen Hilbertschen Raum  $L_2(\sigma)$  mit der Basis  $\sigma(U)$ . Orthogonalität und Vollständigkeit des Systems formulieren sich dann als

$$(\varphi_U, \varphi_{U'})_\beta = \sigma(UU'), \quad (\varphi_E, \varphi_{E'})_\sigma = \beta(EE').$$

Weiterhin wird die Spektralschar eines selbstadjungierten Operators in dieser Darstellung untersucht; dabei werden die spektralen Projektionsoperatoren insbesondere von vornherein als Funktionen von  $\lambda$ -Mengen angesehen. *K. Friedrichs.*

**Kaczmarz, S.: The homeomorphy of certain spaces.** Bull. int. Acad. Polon. Sci. A Nr 4/8, 145—148 (1933).

Verf. beweist, daß gewisse von W. Orlicz eingeführte lineare Räume mit dem Hilbertschen Raum homeomorph sind. *A. Kolmogoroff* (Moskau).

**Minetti, Silvio: La geometria degli olospazii e i suoi legami colle equazioni differenziali ordinarie.** Mem. Accad. Ital., Mat. **4**, 483—587 (1933).

Zur Definition des vom Verf. gebrauchten Funktionalraumes vgl. dies. Zbl. **7**, 169 und 251. Da dieser Raum ein linearer (obwohl nicht abgeschlossener) Unterraum des Hilbertschen Raumes ist, so ist es fast selbstverständlich, daß man in diesem Raum mehrere geometrische Eigenschaften des Hilbertschen Raumes wiederfindet. Im zweiten Teile betrachtet Verf. die endlichdimensionalen Mannigfaltigkeiten im Funktionalraum. Insbesondere bildet die Gesamtheit aller Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung eine solche Mannigfaltigkeit. Ist dabei die Differential-

gleichung linear, so ist die entsprechende Mannigfaltigkeit auch linear. Verf. nennt weiter eine Differentialgleichung pseudolinear, falls die entsprechende Mannigfaltigkeit in einer linearen endlichdimensionalen Mannigfaltigkeit liegt. Die Lösung einer pseudolinearen Gleichung ist auf die Lösung eines Systems der linearen Differentialgleichungen zurückführbar. Näher ist der Fall einer Differentialgleichung  $f(y, y') = 0$  erster Ordnung untersucht, in welchem die entsprechende eindimensionale Mannigfaltigkeit  $M^1$  in einer zweidimensionalen linearen Mannigfaltigkeit, also in einer Ebene  $R^2$ , liegt. Ist dabei  $f$  algebraisch, so ist  $M^1$  eine algebraische Kurve in  $R^2$ , und zwar von derselben Ordnung wie  $f$ . Es bleibt aber dem Ref. unklar, in welchem Maße alle diese Resultate über Differentialgleichungen notwendig mit der Analytizität der betreffenden Funktionen verbunden sind. *A. Kolmogoroff (Moskau).*

**Gunther, N.: Sur les opérations linéaires.** Physik. Z. Sowjetunion **3**, 115—139 (1933).

Verf. gibt einen neuen Beweis des Rieszschen Satzes über die Darstellung der Funktionale durch die Stieltjesschen Integrale, welcher nach seiner Meinung einfacher als die bisher bekannten ist. Dabei braucht Verf. statt additiven Mengenfunktionen die von ihm eingeführten Mittelfunktionen (fonctions moyennes). *Kolmogoroff.*

**Gomes, Ruy Luis: Lineare Operatoren im Hilbertschen Raum.** An. Fac. Ci. Porto **18**, 65—76 (1933) [Portugiesisch].

This is a brief exposition of known elementary results, introductory to a study of the theory of operators. *M. H. Stone (Cambridge, Mass.).*

**Chadenson: Sur l'extension du théorème de Bolzano-Weierstrass à certains ensembles fonctionnels.** C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 1714—1716 (1933).

Es ist bekannt, daß eine un abzählbare separable Menge mindestens einen Häufungspunkt und folglich mindestens einen Limespunkt besitzt [vgl. Hausdorff, Mengenlehre **127** (1927)]. Verf. beweist die letzte Tatsache im Falle beschränkter Untermengen des Hilbertschen Raumes. *A. Kolmogoroff (Moskau).*

**Murray, F. J.: A theory for \*-operators analogous to the theory of reducibility for self-adjoint transformations in Hilbert space.** Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **19**, 1057—1058 (1933).

This note presents, without detailed proof, a theory of pairs of projections  $F, F'$  in Hilbert space which are connected with a given operation  $A$  (with adjoint defined over a dense set) by the relation  $AF = F'A$ . *M. H. Stone (Cambridge, Mass.).*

### Variationsrechnung:

**Friedrichs, Kurt: Über ein Minimumproblem für Potentialströmungen mit freiem Rande.** Math. Ann. **109**, 60—82 (1933).

Das Eindeutigkeitsproblem in der Theorie der Potentialströmungen mit freiem Rande (Flüssigkeitsstrahlen) weicht wesentlich von den entsprechenden Fragestellungen der klassischen Randwert- und Abbildungsaufgaben ab, da das Stromgebiet teilweise von einer unbekannten Kurve begrenzt wird. Auf dieser Kurve soll der Gradient der gesuchten Potentialfunktion  $\psi$  einen konstanten unbekannten Betrag  $v$  annehmen; zugleich muß  $\psi$  auf den gegebenen Randstücken konstante Werte besitzen. — Die Eindeutigkeit (Problem I) wurde bisher nur gegenüber infinitesimalen Abänderungen der unbekannten freien Grenze bewiesen, indem Ref. (Rend. Lincei **1927**, 157) das Problem auf eine leichtere Aufgabe zurückführte, benachbarte Lösungen mit dem gleichen Wert von  $v$  zu betrachten (Problem II). — Verf. beweist (in der Ebene und im Raume) die absolute Eindeutigkeit für das Problem II sowie für die Umkehrung des Problems I, indem er zeigt, daß die Lösung einen Variationsausdruck für  $\psi$  zu einem wirklichen Minimum macht. Zu diesem Zwecke wird der Nachweis erbracht, daß jede für das Variationsproblem zulässige Funktion mit der Lösung des Problems durch eine Kette von zulässigen Funktionen verbunden werden kann, für welche die zweite Variation positiv ausfällt. Es wird ferner unter Heranziehung des Jacobischen Prinzips der multiplikativen Variation ein

neuer Beweis für das lokale Hilfsproblem II gegeben, der weittragender, als die drei bisherigen Beweise [Weinstein, Math. Z. **19** (1924); Hamel, Kongreß Zürich **1926/1927**; Weyl, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **1927**] ist. Es ergibt sich hierbei, daß die oben erwähnte zweite Variation mit einem vom Ref. zum Beweise des Problems II benutzten Ausdruck identisch ist. *Weinstein* (Paris).

**Cinquini, Silvio:** Condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali doppi del calcolo delle variazioni su una data superficie. Mem. Accad. Ital., Mat. **4**, 271—337 (1933).

Given an integral

$$I[z] \equiv \iint_D f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y) dx dy$$

and a surface  $z = z_0(x, y)$ ,  $(x, y)$  on  $D$ , conditions are sought which are necessary in order that  $I[z]$  be semi-continuous for  $z = z_0$ . It is found that if  $z_0$  be continuous together with its partial derivatives  $p_0, q_0$ , then for lower semi-continuity we must have  $f_{pp}f_{qq} - f_{pq}^2 \geq 0$ ,  $f_{pp} \geq 0$ ,  $f_{qq} \geq 0$ ,  $\mathcal{G}(x, y, z_0, p_0, q_0, p', q') \geq 0$  for all  $p', q'$ . If  $z_0$  satisfies a Lipschitz condition, these inequalities must hold for almost all  $(x, y)$ . If  $z_0$  is merely absolutely continuous in the sense of Tonelli, the conditions still must hold for almost all  $(x, y)$  provided that the integrand  $f$  satisfies any one of several sets of supplementary conditions. The exceptional set of  $(x, y)$  (of measure 0) on which the inequalities fail to hold may be non-vacuous, as is shown by examples. *McShane*.

**Lepage, Th. H. J.:** Sur certaines formes différentielles extérieures et la variation des intégrales doubles. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 1718—1720 (1933).

The paper characterizes the second order partial differential equations which determine the extremals of a double integral of the form  $\iint f dx dy$ , where

$$f \equiv Ar + 2Bs + Ct + E(rt - s^2) + D.$$

Moreover a definition of a field and a simple form of the Weierstrass  $E$ -function are obtained for this integral. *Arnold Dresden* (Swarthmore).

**Bukrejew, B.:** Über die Navigationsaufgabe von Zermelo. Commun. Soc. Math. Kharkov et Inst. Sci. math. Ukraine, IV. s. **7**, 83—84 (1933) [Russisch].

Der Verfasser gibt eine vereinfachte Ableitung der Differentialgleichungen von Levi-Civita (Z. angew. Math. Mech. **11**, 314—322; dies. Zbl. **2**, 144) im Falle eines reellen dreidimensionalen Raumes. [Vgl. ferner dies. Zbl. **1**, 341; **3**, 12; **3**, 349; **4**, 155; **6**, 350.] *Autoreferat*.

### Funktionentheorie:

**Broggi, Ugo:** Su di uno speciale problema dei momenti. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **12**, 63—73 (1933).

Es sei

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \dots \quad (1)$$

eine gegebene, überall divergierende Potenzreihe. Nach Borel (Ann. École norm. **1895**) läßt sich auf unendlich viele Arten eine dem Gleichungssystem

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots = c_0, \quad 1^h a_1 + 2^h a_2 + 3^h a_3 + \dots = c_h \quad (h = 1, 2, 3) \quad (2)$$

genügende Folge  $a_0, a_1, a_2, \dots$  bestimmen. Notwendigerweise ist  $\sum |a_n| < \infty$ , und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z+n} \quad (z \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (3)$$

ist eine meromorphe Funktion, welche nach einem klassischen Vorgang, auf Grund des Systems (2), die asymptotische Entwicklung

$$f(z) \sim \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \dots, \quad |\arg z| < \pi - \delta^2 \quad (4)$$

besitzt. Einer Potenzreihe (1) eine Funktion der Gestalt (3) mit der Beziehung (4) zuzuordnen ist die Aufgabe dieser Arbeit und die vom Verf. gegebene allgemeine Lösungs-

methode wurde eben skizziert. Es wird ferner gezeigt, daß man in gewissen Fällen auch anders durchkommt. Es sei  $\Phi(t) = c_0 - (c_1/1!)t + (c_2/2!)t^2 - \dots$  im Nullpunkte und auf der positiven Halbachse regulär, ferner  $\Phi^{(h)}(t) = o(e^{\gamma t})$  ( $h = 0, 1, 2, \dots$ ). Durch partielle Integrationen folgt, für  $|\arg z| < (\pi/2) < \delta^2$ ,  $\Re z > \gamma$ ,

$$f(z) = \int_0^1 t^{z-1} \Phi(-\lg t) dt = \int_0^\infty e^{-tz} \Phi(t) dt \sim \frac{\Phi(0)}{z} + \frac{\Phi'(0)}{z^2} + \dots = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \dots \quad (5)$$

Falls nun  $\Phi(-\lg t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$ ,  $\sum |a_n| < \infty$ , so zeigt die Einführung dieser Reihenentwicklung in (5) und darauffolgende gliedweise Integration, daß die Funktion (5) tatsächlich die gewünschte Gestalt (3) hat. Es ist klar, daß dann (4) sogar für  $|\arg z| < \pi - \delta^2$  gilt. Das spezielle Momentproblem des Titels ist das Problem der Auflösung des Gleichungssystems (2). *I. J. Schoenberg* (Princeton).

**Takahashi, Shin-ichi:** Über die Abschnitte einer ungeraden schlichten Potenzreihe. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 16, 7—15 (1934).

Die Funktion  $f(z)$  sei im offenen Einheitskreise regulär, schlicht, ungerade und in bezug auf den Nullpunkt „sternförmig“. Dann trifft das gleiche für sämtliche Abschnitte ihrer Potenzreihe im Kreise  $|z| < 3^{-1/2}$  zu. Dieser Radius läßt sich nicht vergrößern. Entsprechendes gilt (mit derselben Konstante) für die Klasse der ungeraden konvexen Funktionen. Die Beweismethode ist dem Verfahren nachgebildet, mit dem Ref. die analoge Aufgabe für die Klasse der schlichten Funktionen behandelt hat [Math. Ann. 100, 188—211 (1928)]. *Szegő* (Königsberg, Pr.).

**Takahashi, Shin-ichi:** Zwei Bemerkungen über schlichte Funktionen. Proc. Imp. Acad. Jap. 9, 461—464 (1933).

Outre une démonstration simplifiée d'un théorème de Calugaréano, concernant le rayon d'univalence d'une série de Taylor, l'auteur améliore légèrement l'inégalité de M. Landau: (1)  $\overline{\lim} \frac{|a_n|}{n} < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right) e \left(z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \text{ univ. dans } |z| < 1\right)$ . Il remplace le second terme de cette inégalité par  $\leq 2; \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right) e = 2,22 \dots\right]$ .

*Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

**Chen, Kien Kwong:** On the theory of Schlicht functions. Proc. Imp. Acad. Jap. 9, 465—467 (1933).

En précisant le théorème de Littlewood et Paley (J. London Math. Soc. 7, 167; ce Zbl. 5, 18), l'auteur démontre que si  $f(x) = z + a_3 z^3 + \dots$  est une fonction univalente et impaire dans  $|z| < 1$ , alors  $|a_n| < e^2$ . *Mandelbrojt*.

**Okamura, Hiroshi:** Sur les coefficients de Taylor des fonctions entières d'ordre fini. Tôhoku Math. J. 38, 129—144 (1933).

L'auteur complète les résultats connus dus à Borel, Lindelöf, Valiron, concernant la relation entre l'ordre de grandeur du module maximum d'une fonction entière d'ordre fini et les prop. de la suite des coefficients du dével. taylorien. Si  $M(r)$  est le max. de  $|f(z)|$  pour  $|z| = r$  et  $A_n$  le module du coef. de  $z^n$ , il donne d'abord des conditions pour que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r} = \varrho' \leq \varrho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r} \quad (1)$$

En outre de la condition classique pour que l'ordre soit  $\varrho$ , on doit avoir pour une suite de valeurs  $n = n_p$ ,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{-n \log n}{\log A_n} \geq \varrho', \quad \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \frac{\log n_{p+1}}{\log n_p} \leq \frac{\varrho}{\varrho'}.$$

Lorsque  $\varrho' < \varrho$  ces conditions ne sont pas suffisantes, elles entraînent seulement que le premier membre de (1) est au moins égal à  $\varrho'^2 : \varrho$ . L'a. compare ensuite  $\log \log M(r)$  à une fonction de la forme  $\varphi(u) + \lambda(r) \psi(u)$ ,  $u = \log r$ , où  $\lambda(r)$  a des limites d'indétermination finies;  $\varphi(u)$  et  $\psi(u)$  sont dérivables, la dérivée de  $\varphi$  tend vers  $\varrho$ , celle de  $\psi$  vers 0 lorsque  $u \rightarrow \infty$ ,  $\psi(u)$  a une borne inf. positive. Il donne des cond., nécessaires

pour qu'il en soit ainsi et étudie leurs conséquences. L'a. signale que si  $\psi(u)$  est const. et si  $\lambda(r)$  a une limite, on retrouve les résultats de Valiron concernant l'ordre précisé. On peut aussi observer que pour  $\varphi(u) \equiv \varrho u$ ,  $\psi(u) = \text{const.}$  les résultats de l'a. sont donnés à la page 47 de l'ouvrage cité dans sa première référence où ils sont obtenus par une méthode générale qui fournirait les autres et qui donne sous forme géométrique des cond. néces. et suffisantes. G. Valiron (Paris).

**Whittaker, J. M.:** On Lidstone's series and two-point expansions of analytic functions. Proc. London Math. Soc., II. s. 36, 451—469 (1933).

Contribution importante relative au développement des fonctions analytiques  $f(z)$  en séries de polynômes rangées suivant les valeurs des dérivées d'ordre indéfiniment croissant à des points donnés. Le cas considéré est assez restreint en ce sens qu'il n'y a que deux points donnés,  $z = 0$  et  $z = 1$ , mais, ce qui est très essentiel, les numéros des dérivées en question, sans former nécessairement la suite des nombres entiers positifs, sont quelconques. Cela admis, l'auteur étudie les problèmes de l'unicité et de la convergence du développement. — Soient  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) les numéros des dérivées qui sont données au point  $z = 0$ ,  $q_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) ceux des dérivées données au point  $z = 1$ ;  $P(m)$  le nombre des  $p_i$  qui sont inférieurs à  $m$ ,  $Q(m)$  le nombre des  $q_j$  qui sont inférieurs à  $m$ . Alors, pour que le développement formel

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} f^{(p_i)}(0) \pi_i(z) + \sum_{j=1}^{\infty} f^{(q_j)}(1) \zeta_j(z)$$

soit bien déterminé, il faut que l'on ait 1°  $P(m) + Q(m) \geq m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), 2°  $P(m_r) + Q(m_r) = m_r$  ( $r = 1, 2, \dots$ ;  $0 \leq m_1 < m_2 < \dots$ ). — Il est signalé ensuite, une condition suffisante de la convergence dans le cercle  $|z - \frac{1}{2}| < R$  ( $R > \frac{1}{2}$ ), se réduisant à une limitation de la croissance des nombres  $f^{(n)}(\frac{1}{2})$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). — En se servant de l'inégalité

$$\mu_1! \mu_2! \dots \mu_k! \geq \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{n}{2}}$$

( $\mu_i$  entiers positifs,  $\sum_1^k \mu_i = n$ ), on obtient un résultat plus précis dans le cas des dérivées successives, c'est-à-dire où l'on a  $P(m) + Q(m) = m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ): la condition

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lg \mu(r)}{r} = \gamma < 1 \text{ entraîne la convergence dans le cercle } \left(z - \frac{1}{2}\right) < \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2}.$$

— En particulier, „la série de Lidstone“ est caractérisée par les égalités:

$$p_\nu = q_\nu = 2(\nu - 1) \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

W. Gontcharoff (Moscou).

**Mandelbrojt:** Sur une nouvelle classe quasi-analytique de fonctions indéfiniment dérivables. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 324—326 (1934).

En utilisant ses résultats antérieurs sur les séries de Fourier (C. R. Acad. Sci., Paris 1933; ce Zbl. 8, 152) l'a. a obtenu de nouvelles classes de f. quasi analytiques  $\varphi(t)$ . On suppose  $\varphi(t)$  indef. dérivable sur le segment  $(0, 2\pi)$  et  $|\varphi^{(n)}(t)| < K^n m_n$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ) la suite  $m_n$  étant donnée tandis que la constante  $K$  dépend de  $\varphi(t)$ . Si d'autre part  $\sum (a_{nj} \cos n_j t + b_{nj} \sin n_j t)$  est la série de Fourier de  $\varphi(t)$ , on suppose que l'exposant de convergence  $\sigma$  de la suite des  $n_j$  vérifie la condition  $\frac{1}{\sigma} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log m_n}{n \log n}$  (1). Dans ces conditions  $\varphi(t)$  est identiquement nulle si  $\varphi^{(n)}(0) = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . On définit donc des classes de fonctions quasi analytiques qui contiennent des sous classes n'appartenant pas aux classes de Carleman. Un autre th. montre que la cond. (1) est, à un point de vue analogue à celui de Carleman, une cond. néces. et suffis. de quasi analyticité. Ces prop. sont données sans démonstrations.

G. Valiron (Paris).

**Bergmann, Stefan:** Zur Veranschaulichung der Kreiskörper und Bereiche mit ausgezeichneter Randfläche. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 42, 238—252 (1933).

Unter Kreiskörpern versteht man die Bereiche des  $w$ - $z$ -Raumes, die die Transformationen  $w' = w e^{i\varphi}$ ,  $z' = z e^{i\psi}$  in sich zulassen. Seitdem Hartogs die Konvergenz-

bereiche der Diagonalreihen eingeführt hat, Carathéodory die Indikatrizen seiner Metrik aufstellte, der Referent die invarianten Konvergenzkörper untersuchte und vor allem Henri Cartan den Abbildungssatz bewies, spielen die Kreiskörper in der Theorie der analytischen Funktionen dieselbe Rolle wie die Kreise in der klassischen Theorie. — Verf. bringt nun eine Veranschaulichung dieser Kreiskörper, indem er geeignete dreidimensionale Schnitte durch die Körper legt, die er dann ihrerseits im Grund- und Aufrißverfahren wiedergibt. Gleiches wird dann für die Reinhardtschen und Hartogsschen Körper, die Cartanschen  $(m, p)$ -Bereiche und die vom Verf. selbst eingeführten Bereiche mit ausgezeichneter Randmannigfaltigkeit durchgeführt. Die so entstehenden Bilder, vor allem der  $(m, p)$ -Bereiche, sind sehr überraschend.

Behnke (Münster i. W.).

## Geometrie.

**Haupt, Otto:** Über die Erweiterung eines beliebigen Bogens dritter Ordnung, insbesondere zu einer Raumkurve dritter Ordnung. *J. reine angew. Math.* **170**, 154—167 (1933).

Ein Raumbogen ist von dritter Ordnung, wenn er keine ebene Teilbogen hat und mit jeder Ebene höchstens drei Punkte gemeinsam hat. Ein Raumbogen dritter Ordnung läßt sich immer ordnungsinvariant erweitern, insbesondere zu einer geschlossenen Kurve dritter Ordnung ergänzen, falls die Schmiegebenen in den Endpunkten den anderen Endpunkt nicht enthalten und falls die Tangenten in beiden Endpunkten einander nicht schneiden. Dieser Satz wurde von C. Juel ohne Beweis angegeben; dabei wurde aber angenommen, daß die betrachteten Bogen stetige Tangenten und Schmiegebenen besitzen. Verf. beweist diesen Satz und zeigt, daß die Gültigkeit dieses Satzes an keinerlei Differenzierbarkeitsbedingungen (Existenz und Stetigkeit der Tangente und der Schmiegeebene) gebunden ist. Er gibt auch eine einfache Konstruktion für die Erweiterung des gegebenen Raumbogens dritter Ordnung zu einer geschlossenen Kurve dritter Ordnung.

Sz. Nagy (Szeged).

**Coxeter, H. S. M., and J. A. Todd:** On points with arbitrarily assigned mutual distances. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **30**, 1—3 (1934).

$S^s T^t$  bedeute den Raum aller  $(s+t)$ -tupel reeller Zahlen, wobei

$$\sum_{i=1}^s (x_i - x'_i)^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} (x_i - x'_i)^2$$

das Quadrat der Entfernung der beiden Punkte  $(x_i)$ ,  $(x'_i)$  ist. Es wird gezeigt: Bei beliebig vorgegebenen reellen Zahlen  $c_{ij}$  ( $0 \leq i < j \leq m$ ) gibt es in einem passenden  $S^s T^t$  ( $s+t \leq m$ )  $m+1$  Punkte  $A^0, \dots, A^m$  derart, daß das Quadrat der Entfernung der Punkte  $A^i, A^j$  gleich  $c_{ij}$  wird. Wenn eine gewisse mit Hilfe der  $c_{ij}$  gebildete Determinante nicht verschwindet, können die Punkte  $A^0, \dots, A^m$  linear unabhängig (also  $s+t=m$ ) gewählt werden.

H. Busemann (Kopenhagen).

**Godeaux, Lucien:** Sur les involutions du second ordre de l'espace, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* **2**, 186—189 (1933).

Démonstration du théorème suivant: si le nombre des points unis d'une involution du second ordre de l'espace est fini, ce nombre est égal à huit.

P. Dubréil (Nancy).

**Deaux, R.:** Sur le théorème de Morley-Petersen. *Bull. Acad. Roy. Belge*, V. s. **20**, 22—29 (1934).

Il s'agit du théorème: Dans un hexagone gauche dont tous les angles sont droits, les perpendiculaires communes aux couples de côtés opposés rencontrent orthogonalement une même droite si elles ne sont pas indéterminées. — La présente note établit synthétiquement le théorème mis sous forme projective, à l'aide d'une propriété de trois coniques associées à deux triangles homologues coplanaires.

Auszug.

Weiss, E. A.: Die Konfiguration von L. Klug und das Hexastigma. Tôhoku Math. J. 38, 431—441 (1933).

Aus dem vollständigen Sechseck im projektiven  $R_4$  (Hexastigma) entsteht durch lineare Konstruktion eine Figur, die mehrere interessante Konfigurationen enthält. Durch Vermittlung des folgenden Übertragungsprinzips wird von den Eigenschaften dieser Figur auf ebene Konfigurationen geschlossen. Man ordnet den Punkten des projektiven  $R_5$  die Kurven 2. Klasse mit denselben Koordinaten zu und beschränkt sich dann auf einen festen Teilraum  $R_4$ . Seine Bildkurven sind zu einer bestimmten Kurve 2. Ordnung (Grundkegelschnitt) apolar. Die ausgearteten Bildkurven sind dann die bezüglich des Grundkegelschnittes konjugierten Punktpaare. Im  $R_4$  wird ein Hexastigma so gewählt, daß seine Bildkurven zweifach ausgeartet (also Punkte des Grundkegelschnittes) sind. Punkte auf den Kanten des Hexastigmas haben ausgeartete Bildkurven; liegen drei solche Punkte auf einer Transversalen, so sind die Bildpunktpaare linear abhängig, also Gegenecken eines vollständigen Polarvierseits. Damit ist der Anschluß an die Theorie der desmischen Vierecke gegeben. Die Methode ist wesentlich auf Eigenschaften von Punktpaaren abgestellt. In dieser Richtung erhält Verf. nicht nur neue einfache Beweise für Sätze von H. Schröter und L. Klug, sondern auch weiterreichende Resultate. Friedrich Levi (Leipzig).

Oeagne, d': La notion de cerele instantané dans la théorie des mouvements plans. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 133—135 (1934).

Verf. formuliert einen Satz von Koenigs: Bei einer ebenen Bewegung sei  $I$  der Momentanpol,  $H$  der Wendepol,  $M$  ein beliebiger Punkt,  $\mu$  der Krümmungsmittelpunkt seiner Bahn, und der Kreis  $(M, \overline{MI})$  werde Momentankreis von  $M$  genannt; dann sind  $H$  und  $\mu$  konjugierte Punkte bezüglich des Momentankreises von  $M$ . Dies gibt einfache Konstruktionen, so die Aufsuchung des Wendekreises bei einer Zweipunktführung. In der quadratischen Verwandtschaft  $M \rightarrow \mu$  ist der zu einer Geraden gehörige Kegelschnitt einfach zu finden. Die elliptische Bewegung als Anwendung. Eckhart (Wien).

Crawford, Lawrence: Determination of the foci, directrices, axes and eccentricities of a conic whose equation is given with numerical coefficients. Math. Gaz. 18, 43—46 (1934).

Sauer, R., und O. Baier: Über besondere Dreiecksnetze aus Kegelschnitten. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 43, 153—162 (1933).

Gradliniges Dreiecksnetz nenne man ein System von Graden, die so miteinander inzidieren, wie das System, das aus einem quadratischen ebenen Gitter und einer Diagonalschar besteht. Kegelschnitt-Dreiecksnetz heiße ein System von Kegelschnittbögen, das dieselben Inzidenzen aufweist, wie das gradlinige Dreiecksnetz, mit der Zusatzbedingung, daß 2 Dreiecksseiten sich nicht in der gemeinsamen Ecke berühren dürfen, und daß es sich nicht um lauter Bögen zerfallender Kegelschnitte handeln soll. Um eine zugänglichere Unterklasse dieser Figurengattung zu gewinnen, sei noch eine Zusatzforderung erhoben, die die „besonderen“ Kegelschnitt-Dreiecksnetze kennzeichnen möge: Jedes in einer Ecke inzidente Tripel von Kegelschnitten gehört einem und demselben Büschel an (das aber von Ecke zu Ecke variieren darf). Nun beweisen die Verff.: Jedes besondere Kegelschnittdreiecksnetz läßt sich aus einem gradlinigen Dreiecksnetz durch eine quadratische Abbildung der Ebene erhalten. Verlangt man noch, daß die Kegelschnitte Kreise seien, so kann man diese quadratische Abbildung durch eine einfache räumliche Konstruktion erzeugen: Eine stereographische und eine Zentralprojektion von einer Hilfskugel aus. Zum Schluß wird ein Beispiel eines Kegelschnittdreiecksnetzes angegeben, das kein „besonderes“ ist. Cohn-Vossen (Locarno).

### Algebraische Geometrie:

Versluys, W. A.: Sur les points et plans satellites d'un plan par rapport aux courbes  $w$  de l'espace. Nieuw Arch. Wiskde 18, 76—92 (1933).

$n, r, m$  seien natürliche Zahlen,  $a, b, c$  reelle Zahlen, dann bezeichnet man eine

Kurve des affinen Raums, die die Parameterdarstellung  $x = at^n$ ,  $y = bt^{n+r}$ ,  $z = ct^{n+r+m}$  gestattet, als  $w$ -Kurve. Die Schmiegeebene im Punkt  $t$  schneidet die  $w$ -Kurve  $K$  noch in  $n + r + m - 3$  weiteren Punkten  $v_i t$  ( $1 \leq i \leq n + r + m - 3$ ), wobei die  $v_i$  Wurzeln einer Gleichung  $(n + r + m - 3)$ -ten Grades sind, deren Koeffizienten nur von  $n, r, m$ , nicht von  $a, b, c, t$  abhängen. Die Punkte  $v_i t$  werden die Begleiter (points satellites) des Punkts  $t$  genannt. Sind nun  $t^{(k)}$  die Schnittpunkte von  $K$  mit einer Ebene  $e$  allgemeiner Lage, so zeigt sich durch äußerst einfache Rechnung: Die Begleiter  $v_i t^{(k)}$  liegen, in der Korrespondenz, wie sie der Index angibt, in  $n + r + m - 3$  „Begleitebenen“  $e_i$  von  $e$ . Die Beziehung zwischen  $e$  und den  $e_i$  bleibt ungeändert, wenn man  $K$  durch eine Kurve  $K'$  ersetzt, bei der statt  $a, b, c$  beliebige andere reelle Zahlen stehen; nur die Exponenten spielen eine Rolle. Insbesondere kann man auf diese Weise eine Kurve  $K''$  erhalten, die  $e$  und alle  $e_i$  zu Schmiegeebenen hat. — Die Realitätsverhältnisse werden ausführlich diskutiert, was keine Schwierigkeit macht. Es kommt nur auf die  $v_i$  an. Ergebnis: Ist der Grad  $g = n + m + r$  von  $K$  ungerade, so gibt es entweder zwei oder keinen reellen Begleiter. Ist  $g$  gerade, so gibt es genau einen. Der Fall zweier reeller Begleiter tritt dann und nur dann ein, wenn  $n, m$  gerade,  $r$  dagegen ungerade ist. Ähnliche Sätze werden auch für die Zahl reeller Schnittpunkte von  $K$  mit einer allgemeinen Ebene hergeleitet. *Cohn-Vossen (Locarno).*

**Hollerott, T. R.:** Characteristics of multiple curves and their residuals. Bull. Amer. Math. Soc. 39, 959–961 (1933).

Einige Formeln zwischen Ordnung, Rang, Geschlecht und Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte von zwei Raumkurven  $C_1, C_2$ , die zusammen den vollständigen Schnitt zweier algebraischen Flächen  $F_1, F_2$  bilden im Falle, daß  $C_1, C_2$  für  $F_1, F_2$  die Multiplizitäten  $i_1, i_2$  haben. Es wird auch vorausgesetzt, daß  $C_1$  die vollständige Schnittkurve zweier Flächen ist. *E. G. Togliatti (Genova).*

**Vyčichlo, F.:** Note relative à l'engendrement de la courbe du 4<sup>e</sup> degré et de la 2<sup>e</sup> espèce. Čas. mat. fys. 63, 73–80 (1934) [Tschechisch].

L'auteur construit la courbe du 4<sup>e</sup> degré et de la 2<sup>e</sup> espèce comme lieu des points de l'intersection des plans d'un faisceau de la 2<sup>e</sup> classe et des droites projectives d'une demi-quadrique générale; cette construction est possible d'une infinité de manières. A l'aide de la projection de cette courbe dans un plan arbitraire (on projette du sommet du faisceau pris en considération) il déduit quelques théorèmes fondamentaux sur cette quartique. On peut engendrer la courbe encore de la manière suivante, à savoir à l'aide des points de l'intersection des droites d'une demi-quadrique générale qui se trouvent en involution du 3<sup>e</sup> ordre et des droites projectives de la demi-quadrique complémentaire. L'auteur en déduit les équations paramétriques de la courbe.

*Autoreferat.*

**Segre, Beniamino:** Proprietà in grande di curve algebriche, dedotte da proprietà in piccolo. Mem. Accad. Ital., Mat. 4, 9–16 (1933).

Durch einen Punkt  $P$  einer analytischen Raumkurve  $a$  seien zwei verschiedene nicht-isotrope Ebenen  $e, f$  gelegt, ihre Schnittgerade sei  $g$ .  $e, f$  brauchen nicht allgemeine Lage zu  $a$  zu haben, vielmehr möge  $e$ , bzw.  $f$ , etwa  $k$ , bzw.  $m$  zusammenfallende Punkte in  $P$  mit  $a$  gemein haben. Machen wir dann  $g$  zur  $z$ -Achse,  $e$ , bzw.  $f$  zur Ebene  $x = 0$ , bzw.  $y = 0$ , eines (im allgemeinen schiefen) kartesischen Koordinatensystems derart, daß die Ebene  $z = 0$  auf  $g$  senkrecht steht, so wird  $a$  in der Umgebung von  $P$  eine Potenzreihendarstellung nach einem kleinen Parameter  $t$  in folgender Weise gestatten:  $x = \xi t^k + \dots$ ,  $y = \eta t^m + \dots$ ,  $z = \zeta t^n + \dots$ , wobei  $\xi, \eta$  von Null verschiedene komplexe Zahlen sind. Es werde  $F = F(a, e, f) = \frac{\eta^k}{\xi^m}$  gesetzt. Dann entdeckt Verf. mittels einer nicht trivialen algebraischen Betrachtung folgende merkwürdige Bedeutung der Differentialinvariante  $F$ :  $e', f'$  seien Ebenen in einer gewissen Nachbarschaft von  $e, f$  derart, daß die Schnittgerade  $g'$  von  $e'$  und  $f'$  nicht mit  $a$  inzidiert.  $e'$  wird in einer gewissen Umgebung von  $P$   $k$  Punkte mit  $a$  gemein haben; sei  $r'$  das Produkt der

Entfernungen dieser Punkte von  $g'$  (also  $r' \neq 0$ ). Entsprechend sei  $s'$  für  $f'$  definiert. Dann ist  $\frac{r'}{s'} \rightarrow F$ , wenn  $e', f'$  gegen  $e, f$  so konvergieren, daß  $g'$  stets zu  $a$  punktfremd bleibt. Im übrigen kann sich der Grenzübergang auf ganz beliebige Art vollziehen. Konvergenz von Ebenen wird dabei als Konvergenz der Koeffizienten der in Hessescher Form geschriebenen Ebenengleichung verstanden. Einfache Funktionen der Krümmung und Torsion erhält man als sehr spezielle Fälle der Invariante  $F$  durch geeignete Wahl von  $e, f$  in einem regulären Kurvenpunkt. — Alles spielt sich natürlich im komplexen Gebiet ab. — Sei nun  $a$  nicht nur analytisch, sondern algebraisch, und beschränken wir uns auf den Fall, daß  $e', f'$  Parallelverschiebungen erfahren, dann folgt: Der Quotient  $\frac{r'}{s'}$  ist konstant. Dabei muß nur noch vorausgesetzt werden, daß  $e', f'$  keinen unendlichfernen Punkt mit  $a$  gemein haben. Man wende nämlich den Schluß an: Eine auf einer algebraischen Kurve rationale Funktion ist konstant, wenn sie einen der Werte  $0, \infty$  ausläßt. Der Schluß wird dadurch anwendbar, daß die obige Betrachtung zeigt, daß beim Durchgang der Ebenen durch einen gemeinsamen Schnittpunkt mit  $a$  die Funktion  $\frac{r'}{s'}$  gegen einen endlichen nichtverschwindenden Wert strebt. — Es ist leicht, nunmehr analoge Sätze für mehr als 2 Ebenen aufzustellen, die in sehr allgemeiner Weise im Raum variieren, wofern nur isotrope Ebenen und gewisse Ausnahmefälle relativ zu  $a$  vermieden werden. Auf dieser Weise erhält man u. a. die Verallgemeinerungen der Sätze von Newton und von Carnot auf Raumkurven, wie das von A. Ichida und T. Takasu (vgl. dies. Zbl. 5, 78) formuliert und bewiesen wurde.

Cohn-Vossen (Locarno).

**Godeaux, Lucien:** Sur certaines involutions cycliques, dépourvues de points unis, appartenant à une surface algébrique. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 19, 986—991 (1933).

Fortsetzung einer früheren Untersuchung des Verf. (s. dies. Zbl. 5, 258) über reguläre algebraische Flächen  $F$ , die eine birationale periodische und doppeltpunktfreie Transformation  $T$  in sich zulassen.  $T$  erzeugt auf  $F$  eine Involution  $I_p$ ; die Fläche  $\Phi$ , die eine solche Involution darstellt, wird hier weiter untersucht, und es werden Eigenschaften der Involution  $I$  selbst und der kanonischen und bikanonischen Systeme von  $F$  festgestellt. Anwendung zur Bestimmung von Beispielen von Flächen mit  $p_a = p_g = 0$ ,  $P_2 = p^{(1)} > 1$ .

E. G. Togliatti (Genova).

**Godeaux, Lucien:** Sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces algébriques irrégulières. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 19, 992—997 (1933).

Einige Bemerkungen über Transformationen  $(1, p)$  zwischen zwei irregulären algebraischen Flächen  $F, F'$  im Falle, wo  $p$  eine Primzahl ist und die Involution  $I_p$ , die auf  $F'$  entsteht, zyklisch und doppeltpunktfrei ist. Die Betrachtung von zwei geeigneten entsprechenden vollständigen Kurvensystemen führt zu einigen Eigenschaften der zwei Picardschen Mannigfaltigkeiten von  $F$  und  $F'$ .

E. G. Togliatti (Genova).

**Takami, Minoru:** Sur une propriété de la surface du cinquième ordre. Tôhoku Math. J. 38, 279—287 (1933).

Invariantentheoretischer Beweis des Satzes: Auf einer Fläche 5. Ordnung ist der Ort aller Punkte  $P$ , deren eine Haupttangente die Fläche in zwei weiteren Punkten schneidet, deren Mitte der Punkt  $P$  ist, eine Kurve 200. Ordnung. Diese berührt die parabolische Kurve der Fläche in 1200 Punkten.

E. A. Weiss (Bonn).

### Differentialgeometrie:

**Okada, Kazuwo:** A generalization of Bompiani's theorems on two skew curves. Tôhoku Math. J. 38, 118—123 (1933).

In der Note Invarianti d'intersezione di due curve sghembe [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI s. 14, 456—461 (1931); dies. Zbl. 3, 412] untersuchte Bompiani die Berührung der Projektionen von zwei im gewöhnlichen Raume gelegenen und in

einem Punkte sich schneidenden Kurven. Verf. behandelt analog den Fall zweier im vierdimensionalen Raume gelegener Kurven; als Projektionszentrum wird eine Gerade genommen. Čech (Brno).

**Sun, Dan:** On the curve of intersection of a surface and its tangent plane. Tôhoku Math. J. 38, 245—251 (1933).

L'auteur construit dans le plan tangent d'une surface  $S$  une cubique plane  $C$  ayant un contact d'ordre 3 avec chaque branche de la courbe d'intersection notée au titre. En appliquant la transformation de Čech aux points de  $C$  il obtient un faisceau de plans dont l'axe est la première arête de Green de  $S$ . Une autre propriété de cette droite se rattache aux coniques  $K_1, K_2$  ayant un contact d'ordre 3 avec la première et la seconde branches de  $C$  respectivement. S. Finikoff (Moscou).

**Constantinidis, F.:** Famille de courbes admettant le même plan rectifiant. Bull. Soc. Math. Grèce 14, Nr 2, 39—62 (1933).

Die rektifizierende Ebene  $r$  einer Raumkurve  $k$  werde bei Durchlaufung von  $k$  so mitbewegt, daß die Tangente  $t$  an  $k$  relativ zu  $r$  in Ruhe bleibt; das ist also die Bewegung, die der kinematischen Deutung des  $k$  begleitenden Dreikants  $D$  entspricht. Bekanntlich ist die Instantanachse  $a$  der Bewegung von  $D$  parallel  $r$ . Sei  $g$  die durch den laufenden Kurvenpunkt gezogene Parallele zu  $a$ ;  $g$  liegt also in  $r$ , hat jedoch in  $r$  variable Lage. Sei  $t(c)$  die in  $r$  gezogene Parallele zu  $t$  im Abstand  $c$ ;  $t(c)$  ist also relativ zu  $r$  fest. Dann beweist Verf. durch leichte Rechnung (die sich durch kinematische Überlegungen ersetzen ließe):  $t(c)$  umhüllt eine Raumkurve  $k(c)$ . Der Berührungspunkt von  $t(c)$  mit  $k(c)$  ist der Schnittpunkt  $S(c)$  von  $t(c)$  mit  $g$ . Die rektifizierende Ebene von  $k(c)$  ist wieder  $r$ . Läßt man jetzt  $c$  alle Werte durchlaufen, so hat man eine Klasse von Raumkurven  $k(c)$  (wobei  $k(0)$  die ursprüngliche Kurve  $k$  ist), die sich so aufeinander beziehen lassen, daß entsprechende Punkte auf einer Graden (nämlich  $g$ ) liegen, daß entsprechende Tangenten parallel sind, und daß alle  $k(c)$  in entsprechenden Punkten dieselbe rektifizierende Ebene haben (nämlich  $r$ ). In entsprechenden Punkten hängen die Krümmungen gebrochen linear von  $c$  ab, auch andere geometrische Größen und Örter zeigen naturgemäß lineares Verhalten in  $c$ . — Der zweite Teil der Arbeit sucht Enveloppen beliebiger relativ zu  $r$  fester Graden. Nach Ansicht des Ref. sind diese Ausführungen unrichtig, wobei der Fehler im Übergang von Gleichung (46) zu (47) (S. 51) steckt. Cohn-Vossen (Locarno).

**Gambier, Bertrand:** Théorèmes de Meusnier et Moutard; surfaces algébriques osculatrices à une surface. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 37—39 (1934).

Soit  $S$  une surface,  $MT$  — une tangente à  $S$  en  $M$ ,  $P$  — le plan qui passe par  $MT$  et découpe sur  $S$  une section  $s$ ; une courbe algébrique plane  $C_m$  de degré  $m$ , osculatrice à  $s$ , ayant avec  $s$   $m(m+3)/2$  points communs à  $M$ , engendre,  $P$  pivotant autour de  $MT$ , une surface algébrique  $Q$ . — Si  $m = 2$ , on obtient le théorème noté de Moutard. — Si  $m = 3$ , la courbe  $C_3$  recoupe  $MT$  en  $\mu$ ; si,  $P$  tournant,  $\mu$  parcourt  $p_1$  fois  $MT$ , le degré de  $Q$  est  $3 + p_1$ . Si  $Q$  comprend, outre  $p_1$  nappes contenant  $MT$ , une nappe  $Q'$  dont l'intersection ( $Q'S$ ) comprend  $p_2 + q$  branches passant par  $M$  dont  $p_2$  branches touchent  $MT$ , on a  $2(p_1 + p_2) + q = 9$  le nombre des points communs de  $C_3$  et de  $s$  et  $p_2 + q - 1 = 2$  l'ordre de contact de  $S$  et de  $Q$ . L'étude détaillée omise donne  $q = 1, p_2 = 2, p_1 = 2$ . — Au cas général d'une surface  $Q_m$  de degré  $m$ , ayant  $M$  pour point simple,  $C_m$  recoupe  $MT$  en  $m - 2$  points fixes et l'ordre de contact le plus élevé possible de  $Q$  et de  $S$  est égal au degré minimum des équations aux dérivées partielles vérifiées par la surface  $Q_m$  générale, diminué d'une unité. S. Finikoff.

**Ritter, Robert:** Zwischenintegrale der Verbiegungsgleichung und Differentialparameter zweiter Ordnung. Schr. math. Semin. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin 1, 275 bis 306 (1933).

Soweit bisher Biegungsflächen einer Fläche explizit angegeben werden konnten, geschah es mit Hilfe räumlich-geometrischer Betrachtungen, vor allem durch Heranziehung der W-Flächen, oder durch die Bianchische Konstruktion. Demgegenüber geht

Verf. rein analytisch von der Monge-Ampèreschen Gleichung aus, auf die man nach Darboux das Biegungsproblem zurückführen kann. Es wird nachgerechnet, wann diese Gleichung Zwischenintegrale erster Ordnung von möglichst allgemeinem Typ hat. Dabei werden die Linienelemente des Rotationsparaboloids und der Rotationsfläche der Evolute der Kettenlinie als die in gewissem Sinne einzig zugänglichen Linienelemente wiedergefunden; bekanntlich sind das auch gerade die Flächen, deren Verbiegung man mit Hilfe der W-Flächen am vollkommensten beherrscht. Im Anschluß an diese Rechnung werden allgemeinere ziemlich komplizierte Formeln aufgestellt, die die kovarianten Ableitungen zweiter Ordnung einer Ortsfunktion auf der abstrakt gegebenen Fläche in Beziehung setzen mit den Differentialparametern erster und zweiter Ordnung.

Cohn-Vossen (Locarno).

**Delgleize, A.:** Sur les surfaces à représentation isothermique des lignes de courbure. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 2, 195—199 u. 217—222 (1933).

L'auteur étudie la transformation de Ribaucour des surfaces  $\Sigma$  désignées au titre par la méthode de Eisenhart-Bianchi. Une surface  $P$  (déformée du paraboloid de révolution) donnée, il existe deux surfaces minima  $S, \bar{S}$  transformées  $R$  l'une de l'autre dont les normales sont parallèles aux tangentes principales de  $P$ . L'auteur obtient des surfaces  $\Sigma$  comme surfaces ayant même représentation sphérique de ses lignes de courbure que  $S$  et telle que le point  $\Sigma$  soit invariablement lié au plan tangent de  $P$ , et parmi celles-là  $\infty^1$  surfaces  $\Sigma_1$  transformées  $R$  de  $\Sigma$ . *S. Finikoff.*

**Su, Buchin:** On certain quadratic cones projectively connected with a space curve and a surface. Tôhoku Math. J. 38, 233—244 (1933).

Soient  $t$  une tangente à un point  $M$  d'une courbe gauche  $C$ ,  $S$  la surface développable des tangentes de  $C$ ,  $c$  une section plane coupée sur  $S$  par un plan  $\pi$  qui passe par  $t$ . Les points  $O_1, O_2$  et la droite de Bompiani [„Per lo studio proiett.-diff. delle singularita“ Boll. Un. Mat. Ital. 5, 118—120 (1926)] qui représentent respectivement les voisinages du 4<sup>me</sup>, du 6<sup>me</sup> et du 5<sup>me</sup> ordres de  $c$ , décrivent,  $\pi$  pivotant autour de  $t$ , une droite, une cubique gauche et un cône quadratique. Le même procédé appliqué à une surface arbitraire  $S$  et à deux faisceaux de plans de l'axe  $t_1$  ou  $t_2$  (les tangentes asymptotiques de  $S$ ), donne deux cônes quadratiques  $C_1, C_2$ . Les plans polaires de  $t_1, t_2$  par rapport à  $C_2, C_1$  se coupent suivant l'arête de Green. *S. Finikoff* (Moscou).

**Picasso, E.:** Sulla geometria proiettiva-differenziale delle superficie di  $S_4$ . Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 285—290 (1933).

L'auteur construit un repère mobile normale (autre que celui de Bompiani, Atti Accad. naz. Lincei, Rend. 5, 143 (1927)) attaché à chaque point d'une surface  $V_2$  de  $S_4$  et qui représente les deux propriétés de  $V_2$ : d'avoir des points plans et d'être immergée dans  $S_4$ . La normalisation convenable des coordonnées homogènes des points de  $S_4$  lui permet de faire coïncider les formes  $\varphi_2, \varphi_5$  de Bompiani [ib. 9, 847 (1929)] liées aux équations aux dérivées partielles du troisième ordre qui déterminent les coordonnées  $(x)$  de  $V_2$ , et les formes  $F_2, F_5$  qui déterminent le réseau unique de  $V_2$  et ses lignes quasi-asymptotiques. Cela posé, il prend pour les sommets de la pyramide coordonnée le point  $(x)$  de  $V_2$ , les points  $\bar{z}, z$  transformés de Laplace de  $(x)$  dans les directions  $u$  et  $v$  du réseau et les deux points  $\bar{Z}, Z$  où le plan d'appui du système plan composé des extrémales de  $\varphi_2$  coupe les droites  $(x_u x_{uu})$  et  $(x_v x_{vv})$ . *Finikoff.*

**Sintsoff, D. M.:** Sur la détermination des points singuliers d'une surface, définie par des équations de forme paramétrique. Commun. Soc. Math. Kharkow et Inst. Sci. math. Ukraine, IV. s. 7, 9—13 (1933).

**Takasu, Tsurusaburo:** Vierscheitelsatz in der Lieschen höheren Kreisgeometrie. Tôhoku Math. J. 38, 288—300 (1933).

Der Vierscheitelsatz wird für die Liesche Ebene verallgemeinert. Nach der Erklärung der in Betracht kommenden Kurven und des Begriffs des Scheitels wird der Satz bewiesen; der Beweis gelingt einerseits durch Zurückführung auf den entsprechen-

den Satz in der gewöhnlichen Ebene, dann aber auch rein Lie-geometrisch. Zum Schluß werden die entsprechenden Sätze in der konformen und Lagerreschen Ebene angegeben.

*Heinrich Schatz* (Innsbruck).

**Ogiwara, Shinji:** Über die Affinkurvenentfernungen. Tôhoku Math. J. 38, 101 bis 117 (1933).

La distance affine  $z = (C - \mathfrak{A}, C', C'', \dots C^{(n-1)})^{\frac{1}{n}}$  d'un point  $\mathfrak{A}$  au point  $C$  d'une courbe  $C$  dans l'espace  $R_n$ , les dérivées prises par rapport à l'arc affine de  $C$ , est égale, à un coefficient numérique près, à l'arc affine d'une parabole du degré  $n$  qui passe par les deux points et est en contact d'ordre  $n$  avec  $C$ . Les applications: les courbes de la distance  $z$  constante; la généralisation des théorèmes d'Euler-Ptolémé (sur les coniques), de Cayley (sur les tangentes d'un cercle) etc; les distances  $z$  des deux asymptotiques d'une surface dans  $R_3$  (égales entre elles). *S. Finikoff* (Moscou).

**Haack, Wolfgang:** Eine geometrische Deutung der Affin-Invarianten einer Raumkurve. Math. Z. 38, 155—162 (1934).

Le terme géométrique noté au titre se rattache aux notions de la géométrie réglée de la courbe  $C$  (le complexe linéaire osculateur  $K$ , le cône quadratique osculateur, la demi-quadrique  $Q$  osculatrice à la surface réglée des normales principales de  $C$ ). Exemple: la torsion de  $C$  est égale, à un coefficient numérique près, à la racine carrée du volume de la pyramide coupée du trièdre coordonné par le plan qui passe parallèlement à l'axe de  $K$  par le centre de  $Q$  et par le point qui correspond au plan normal affine de  $C$  dans le système-nul de  $K$ . Le procédé du calcul des vecteurs à six composants est celle qui a été employé par l'auteur dans le mémoire antérieur (ce Zbl. 3, 363).

*S. Finikoff* (Moscou).

**Rossinski, Serge:** Sur un cas de déformation des congruences isotropes à réseau conjugué persistant. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 1562—1565 (1933).

La surface  $S$  se déforme à réseau conjugué persistant. Les rayons de la congruence  $C$  se déplacent entraînés par les plans tangents orthogonaux de  $S$ . Quand est ce que  $C$  conserve la propriété d'être isotrope? La réponse: si  $S$  est une surface minima qui se déforme à réseau persistant des lignes de longueur nulle et les développables de  $C$  lui correspondent.

*S. Finikoff* (Moscou).

**Vincensini, P.:** Sur certains mouvements de figures invariables. Hélicoïdes pseudo-sphériques et couples de sphères. Transformation par polaires réciproques. Bull. Soc. Math. France 61, 186—208 (1933).

L'auteur poursuit ("Aires courbes en perspective etc". Ce Zbl. 3, 364) l'étude des surfaces ( $S$ ) et des courbes ( $C$ ) qui engendrent par des cloisons différentes au cours d'un mouvement déterminé des volumes proportionnels aux aires des cloisons (ou par les arcs différents des aires proportionnelles à leurs longueurs). Le cas général d'un mouvement arbitraire ne donne pas des solutions nouvelles. En appliquant à l'équation différentielle des surfaces ( $S$ ) le procédé énoncé dans sa Note récente (ce Zbl. 4, 415), il les obtient comme surfaces génératrices des congruences ( $I$ ) de Ribaucour à surface moyenne plane et à enveloppée moyenne sphérique. Ainsi les hélicoïdes pseudosphériques correspondent aux congruences ( $I$ ) des tangentes communes de deux sphères, les hélicoïdes de Dini — aux sphères tangentes, les surfaces de révolution — aux sphères égales etc. En terminant l'auteur démontre que les hélicoïdes en question se transforment en elles même par polaires réciproques par rapport à un paraboloïde de révolution convenablement choisi.

*S. Finikoff* (Moscou).

**Vincensini, P.:** Sur les réseaux associés et leurs transformations. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 1565—1566 (1933).

Deux réseaux  $R$  et  $R'$  sont associés s'il existe  $\infty^1$  congruences  $\Delta$  conjuguées à  $R'$  et harmoniques à  $R$ . Quelque soit un réseau  $R$  et la congruence  $I'$  lui conjuguée, on peut grouper les congruences  $C$  simplement stratifiables et conjuguées à  $I'$  en familles des  $\infty^1$  congruences  $\Delta$  à rayons concourants; les points  $R'$  où ils se rencontrent composent un réseau  $R'$  associé à  $R$ . Les congruences de tangentes homologues des courbes

de  $R$  et  $R'$  forment des couples simplement stratifiables. Les réseaux doublement associés (= en deux sens) sont des réseaux focaux de même rang de deux congruences d'un couple stratifiable conjugué. La transformation de Laplace les transforme simultanément en deux réseaux analogues. Si  $R$  est orthogonal, les congruences  $\Delta$  sont cycliques. Les cercles des  $\infty^1$  systèmes cycliques associés passent par le point  $R$  et sont situés sur une sphère  $\Sigma$  de centre  $R'$ . *S. Finikoff* (Moscou).

**Vincensini, P.: Transformations successives de Ribaucour. Familles de systèmes cycliques concourants.** C. R. Acad. Sci., Paris 198, 35—37 (1934).

Si  $R$  est un réseau orthogonal et  $R'$  — un réseau associé à lui (voir le réf. préc.), les  $\infty^1$  congruences cycliques  $C$  harmoniques à  $R$  et dont les rayons passent par les points  $R'$ , déterminent  $\infty^2$  réseaux  $R_1$  transformés de Ribaucour de  $R$  (portés par les surfaces orthogonales aux cercles des systèmes cycliques associés). Comme  $R'$  est également associé à  $R_1$ , on peut construire des congruences cycliques  $C_1$  harmoniques à  $R_1$  et au moyen de  $C_1$  les  $\infty^2$  réseaux  $R_2$  transformés de Ribaucour de  $R_1$  et ainsi de suite. Les points homologues de  $R_i$  sont situés sur une sphère de centre  $R'$ , normale aux surfaces qui portent les réseaux. *S. Finikoff* (Moscou).

**Hamburger, Hans: Trasformazione di Ribaucour e rappresentazione sferica.** Rend. Semin. mat. Roma, III. s. 1, 25—26 (1933).

**Pantazi, Al.: Sur les couples de congruences stratifiables.** C. R. Acad. Sci., Paris 197, 1566—1569 (1933).

Deux congruences  $K, K'$  forment un couple stratifiable s'il existe deux familles de surfaces  $S, S'$  dont les plans tangents aux points où elles rencontrent un rayon de  $K$ , passent par le rayon homologue de  $K'$  et vice-versa. L'auteur examine des couples qui contiennent les familles  $(S)$  composées de surfaces réglées. Dans le cas général, les surfaces  $S'$  sont des surfaces réglées également. On obtient le couple en question si l'on considère une famille de quadriques  $(Q)$  touchant leur enveloppe suivant les quatre côtés  $s_0, s'_0, \sigma_0, \sigma'_0$  d'un quadrilatère gauche qui décrivent quatre surfaces réglées  $S_0, S'_0, \Sigma_0, \Sigma'_0$ . Les génératrices d'un mode de  $Q$  forment une congruence  $W$  dont  $S_0, S'_0$  sont les focales et qui fait un couple stratifiable avec elle-même. Les rayons homologues appartiennent à une même quadrique  $Q$ . Les surfaces  $S$  et  $S'$  sont engendrées par les génératrices du second mode de  $(Q)$ . Le couple est conjugué si les surfaces  $\Sigma_0, \Sigma'_0$  se réduisent à deux droites  $D, D'$ . Cette configuration est été mentionnée par l'auteur du référat [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. 12, 302 (1930); Ann. Scuola norm. super. Pisa (2) 2, 73 (1933); ce Zbl. 6, 79]. — Dans le cas singulier les surfaces  $(S')$  sont des surfaces dont les asymptotiques d'une famille appartiennent à des complexes linéaires. Les congruences  $K, K'$  sont engendrées par les droites issues des points de deux courbes  $C, C'$  qui se trouvent dans la situation du problème de Koenigs. *Finikoff*.

**Terracini, A.: Sulle congruenze di rette più volte associabili rispetto a una superficie.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 291—296 (1933).

Une congruence  $\Gamma'$  associée (ce Zbl. 7, 366) à la congruence  $\Gamma$  par rapport à la surface  $(x)$  est engendrée par la droite qui joint  $(x)$  avec le point

$$y = [b - (\log R)_v] x_u + [c - (\log R)_u] x_v + x_{uv}$$

où  $u, v$  sont les paramètres asymptotiques,  $R$  satisfait deux équations linéaires (A) à dérivées partielles du second ordre et  $R = \text{const}$  correspond à  $\Gamma'$ . L'auteur examine des congruences  $\Gamma$  qui possèdent plus que  $\infty^1$  congruences associées. Il est à distinguer deux cas: 1°  $\Gamma$  n'est pas conjuguée à  $(x)$ . Il existe au plus  $\infty^2$  congruences  $\Gamma'$ . Le système (A) possède trois solutions  $R_i$  linéairement indépendantes. En les prenant pour les coordonnées d'un point  $(R)$  du plan  $\pi$  on obtient un réseau plan  $(R)$  projectivement applicable sur  $(x)$  (Fubini-Čech, Introduction à la géom. proj.-diff. des surf. p. 155). Les lignes de  $(x)$  qui correspondent aux diverses réseaux de  $\pi$  forment  $\infty^1$  systèmes axiaux (= les plans osculateurs passent par un axe) dont les axes engendrent les  $\infty^2$  congruences  $\Gamma'$ . — 2°.  $\Gamma$  est conjuguée à  $(x)$  qui est maintenant une surface  $R$ .

Il existe  $\infty^3$  congruences  $\Gamma'$  complètement conjuguées à  $(x)$  (au sens de Fubini-Čech, ib. n 42). S. Finikoff (Moscou).

**Cisotti, U.: Deduzioni differenziali dalla definizione di vettori reciproci: derivazioni successive. II.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 331—334 (1933).

**Cisotti, U.: Deduzioni differenziali dalla definizione di vettori reciproci: applicazioni geometriche. III.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 420—424 (1933).

Weitere Anwendungen des Begriffes des „reziproken Vektors“

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{g_{\lambda\mu} a^\lambda a^\mu}$$

[Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 764—767 (1933); dies. Zbl. 7, 228; und 18, 255—260 (1933); dies. Zbl. 8, 83] auf die Vektorrechnung, insbesondere im Falle  $a^\nu = dx^\nu$ . Die „Division“ durch  $a$  wird nämlich mittels

$$\frac{b}{a} = \frac{g_{\lambda\mu} a^\lambda b^\mu}{g_{\sigma\alpha} a^\sigma a^\alpha}$$

erklärt, so daß sich dann leicht Ausdrücke wie

$$\frac{dm}{dx}, \quad \frac{dv}{dx}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{dv}{dx} \text{ usw.}$$

berechnen lassen.

Hlavatý (Praha).

**Hayden, H. A.: On some congruences associated with a sub-variety in a  $V_n$ .** Quart. J. Math., Oxford Ser. 4, 117—125 (1933).

The author calls the  $\infty^1$  unit tangent vectors along a curve in a Riemannian manifold  $V_m$  a congruence of unit vectors along this curve. Then, with the aid of the Frenet formulas,  $n - 1$  normal unit congruences can be defined and  $n - 1$  curvatures. If the curve lies in a  $V_m$  in  $V_n$ ,  $m < n$ , there are also defined, in a similar manner,  $m - 1$  normal unit congruences and  $m - 1$  curvatures with respect to  $V_m$ . A congruence along a curve in  $V_n$  is now called „conjugate of order  $p$ “, if its first  $p$  normal congruences relative to  $V_n$  are all tangential to  $V_m$ ,  $p \leq m - 1$ . An asymptotic line of order  $p$  is therefore the envelope of a conjugate congruence of order  $p$ . Some properties of such conjugate congruences are derived, and in particular a generalisation of the formula of Beltrami-Enneper. The case of a non-holonomic variety of  $m$  dimensions is discussed, also when this variety is not restricted to be tangential to the curve.

Struik (Cambridge, Mass.).

**Weatherburn, C. E.: Some theorems in Riemannian geometry.** Tôhoku Math. J. 38, 422—430 (1933).

( $v$ ) sei ein Vektorfeld in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $V_n$ .  $e$  sei Einheitsvektor in einem Punkt von  $V_n$ . Bildet man die kovariante Ableitung von ( $v$ ) in Richtung  $e$  und projiziert sie auf  $e$ , so heiße diese Zahl  $v_e$  die Tendenz des Feldes ( $v$ ) nach  $e$ . Dieser Ausdruck hat zwei Eigenschaften, die die Rechnung erleichtern: 1. Sind  $e_1$  bis  $e_n$  irgendwelche paarweise orthogonale Einheitsvektoren in einem Punkt von  $V_n$ , so ist  $\sum_{i=1}^n v_{e_i}$  die Divergenz von ( $v$ ) in jenem Punkt. 2. Ist  $V_n$  eingebettet in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit  $V_m$  ( $m > n$ ), und liegen die Vektoren ( $v$ ),  $e$  in  $V_n$ , so erhält man für die Tendenz von ( $v$ ) nach  $e$  denselben Wert bezüglich  $V_n$  und bezüglich  $V_m$ . Hierdurch ergibt sich die Möglichkeit, Divergenzen in zwei Summanden aufzuspalten, indem man bei der auf 1. beruhenden Berechnung ein Teilsystem der  $e_i$  in eine vorgegebene Untermannigfaltigkeit legt; die von diesem Teilsystem herrührende Partialsumme wird, falls das Vektorfeld ( $v$ ) in der Untermannigfaltigkeit  $V_n$  liegt, die Divergenz von ( $v$ ) in  $V_n$  darstellen. — Aus diesem Ansatz werden zahlreiche Formeln hergeleitet, insbesondere für Hyperflächen  $V_{m-1}$ , und insbesondere (aber nicht ausschließlich) für den Fall, daß  $V_m$  euklidisch ist. Erst wenn man noch im letzten Fall weiter auf  $m = 3$  spezialisiert, kommt man auf bekannte Relationen zwischen mittlerer und Gaußscher Krümmung einer Fläche und gewissen Divergenzausdrücken des Normalenvektors, Relationen, die Verf. in seinem Buch „Differential Geometry of three dimensions“ (1927)

angegeben hat. Zum Schluß werden Systeme von Hyperflächen sowie Kurvenkon-  
gruenzen im Riemannschen Raum mit der geschilderten Methode behandelt.

*Cohn-Vossen* (Locarno).

**Hlavatý, V.: Induzierte und eingeborene Konnexion in den (nicht)holonomen Räumen.** Math. Z. 38, 283—300 (1934).

In einem mit einem  $m$ -Richtungsfeld ausgestatteten  $X_n$ , also einem  $X_n^m$ , sei eine Übertragung  $(I_{\mu\lambda}^{\alpha})$  gegeben. Mittels eines Systems von  $n - m$  Tangentialvektoren  $t_i$  ( $a, b \dots = 1, 2, \dots, (n - m)$ ) und  $n - m$  affinnormalen Vektoren  $n^{\alpha}$ , wofür gilt  $n^{\alpha} t_i = \delta_i^{\alpha}$ , wird in  $X_n^m$  eine Übertragung  $(I_{cb}^a)$  induziert. Es zeigt sich, daß umgekehrt die Übertragungsparameter  $I_{cb}^a$  bei festgehaltenen  $t_i$  die affinnormalen Vektoren bestimmen. Unter allen diesen induzierten Übertragungen ist eine ausgezeichnet, die zu  $t_i$  gehörige „eingeborene“ Übertragung. Die zugehörigen Affinnormalen genügen zwei Normierungsbedingungen (für  $m = n - 1$  bekannt als die erste und zweite Normierungsbedingung). Es wird angegeben, wie sich die  $I_{cb}^a$  ändern, wenn man die Felder  $t_i$  und  $n^{\alpha}$  abändert und die Parameter  $I_{\mu\lambda}^{\alpha}$  bahntreu transformiert. Es folgen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß man einen holonomen Raum  $L_m$  konstruieren kann.

*J. Haantjes* (Delft).

**Schouten, J. A., und E. R. van Kampen: Beiträge zur Theorie der Deformation.** Prace mat. fiz. 41, 1—19 (1933).

In einer  $L_n$ , welche auf die Koordinaten  $\xi^{\nu}$  bezogen wird, sei ein Vektorfeld  $v^{\nu}$  gegeben. Dieses gibt Anlaß zu vier Operationen mit den Symbolen

$$D = \frac{d}{dt}. \quad (i, k, l = 1, 2, 3, 4)$$

$\frac{1}{d}$  ist das Symbol des gewöhnlichen Differentials in der Richtung  $d\xi^{\nu} = v^{\nu} dt$ ,  $\frac{2}{d}$  weist auf die pseudoparallele Verschiebung in der Richtung  $v^{\nu} dt$  hin,  $\frac{3}{d}$  ist das Symbol der Differenz des „mitgeschleppten“ Wertes in  $\xi + d\xi$  und des natürlichen in  $\xi$  (ein mitgeschl. Objekt hat in  $\xi + d\xi$  dieselben Bestimmungszahlen in bezug auf das Koordinatensystem  $\xi + d\xi$  wie das ursprüngliche in  $\xi$  in bezug auf das Koordinatensystem  $\xi$ ), und endlich  $\frac{4}{d}$  ist das Symbol der Variation, welche durch die Deformation  $\xi + d\xi$

verursacht wird. Aus den Symbolen  $\frac{i}{D}$  werden kovariante Symbolen  $\frac{ik}{D} = \frac{i}{D} - \frac{k}{D}$  konstruiert, so daß  $\frac{ik}{D} + \frac{kl}{D} = \frac{il}{D}$ . Der Kern der Methode besteht einerseits in dem bewiesenen Satze, daß  $\left( \frac{44}{D} V_{\mu}^{\alpha} - V_{\mu}^{\alpha} \frac{44}{D} \right)$  angewandt auf ein Objekt (mit definierter Übertragung) ein invariantes Resultat gegenüber der Variationsabänderung des Objektes gibt, wenn die Variation der Übertragung festgehalten wird, andererseits in der Be-

rechnung von  $\frac{uv}{D} V_{\mu}^{\alpha} - V_{\mu}^{\alpha} \frac{uv}{D}$  ( $u, v = 1, 2, 3$ ) für Größen. — Als Beispiel wird die Deformation einer anholonomen  $V_n^m$  behandelt, womit u. a. eine Verallgemeinerung des Bompianischen Satzes über Deformation einer Minimal- $V_m$  bewiesen wird. [Vgl. auch die im selben Jahre erschienenen Arbeiten von P. Dienes, C. R. Acad. Sci., Paris 194, 1084—1087; 197, 1167—1169 (1933); nachst. Referat.]

*Hlavatý.*

**Dienes, Paul: Sur la déformation des espaces à connexion linéaire générale.** C. R. Acad. Sci., Paris 197, 1084—1087 (1933).

**Dienes, Paul: Sur la déformation des sous-espaces dans un espace à connexion linéaire générale.** C. R. Acad. Sci., Paris 197, 1167—1169 (1933).

In einem  $n$ -dimensionalen Raume  $X_n$ , der auf die Koordinaten  $x^{\nu}$  bezogen ist, sei eine Bewegung

$$x^{\nu} = x^{\nu} + \varepsilon v^{\nu} \quad (1)$$

gegeben, wo  $\varepsilon$  eine infinitesimale Konstante und  $v''$  einen gegebenen Vektor darstellen. Ist  $T$  ein beliebiger Affinor im  $X$ , so bezeichnen wir mit  $'T$  den Affinor  $'T = T('x)$ , mit  $\bar{T}$  die aus  $T$  mittels (1) transformierten Bestimmungszahlen, mit  $T^*$  den Affinor, der aus  $T$  mittels Parallelverschiebung (vom  $x$  nach  $'x$ ) entsteht. Dann können drei Arten von „Deformation“ betrachtet werden

$$\delta T = 'T - \bar{T}, \quad \Delta T = T^* - \bar{T}, \quad DT = T^* - 'T, \quad (2)$$

sodaß symbolisch  $\Delta = D + \delta$ . Bemerkenswert ist, daß  $\delta$  auch auf Objekte, welche keine Größen sind, angewandt werden kann, wie aus der Definition von  $\delta$  folgt. Diese Resultate finden in der zweiten Arbeit die Anwendung in der Theorie eines  $X_m$  in  $X_n$  ( $m < n$ ). Dabei wird vorausgesetzt, daß die Konnexion im  $X_m$  mittels der Projektion (in üblicher Weise) von  $X_n$  auf  $X_m$  induziert wird. Einige Beispiele werden zugefügt. [In der Gleichung (2) der ersten Note soll  $-\bar{a}_{\alpha\beta}$  statt  $-\alpha_{\alpha\beta}$  stehen, in der Gleichung (6) der zweiten Note fehlt  $\varepsilon$ .] Den Operator  $\delta$  hat zuerst Slebodzinski (dem Wesen nach) eingeführt [Bull. Acc. Roy. Belg. (5), 17, 846—870 (1931)]. Nachher wurde er von van Dantzig zur „Lieschen Ableitung“ gebraucht (Proc. Kon. Ak. Wetensch. Amsterdam 35, 535—542 (1932); dies. Zbl. 4, 368. Alle drei Deformationssymbole wurden zum ersten Male von Schouten und v. Kampen [Prace mat. fiz. 41, 1—19 (1933); (vgl. vorst. Referat)] eingeführt und systematisch behandelt. Ref.

Hlavatý (Praha).

**Dienes, P.:** Sur un théorème de M. Fermi. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 369—372 (1933).

In einem  $n$ -dimensionalen Raume  $A_n$  mit den symmetrischen Konnexionskoeffizienten  $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \Gamma_{\mu\lambda}^\nu$  denkt man sich die Koordinaten  $x^\nu$  so gewählt, daß eine gegebene Kurve  $C$  zur Parameterkurve wird:  $x^\nu = t\delta_1^\nu \cdot u^\nu(t)$  sei ein System von  $n$  linear unabhängigen Vektorfeldern, und zwar soll jedes Feld aus parallelen Vektoren (längs  $C$ ) bestehen. Aus diesen Feldern konstruiert man im  $A_n$  die Vektorfelder  $A_\lambda^\nu(t, x^2, \dots, x^n)$  mit den Nebenbedingungen

$$A_\lambda^\nu(t, 0) = u_\lambda^\nu(t), \quad (a)$$

$$(V_b A_\lambda^\nu(t, x))_C = 0. \quad (b = 2, \dots, n) \quad (b)$$

Dann gilt für die verallgemeinerten Riccischen Rotationskoeffizienten  $A_{\lambda\mu}^\nu(t, x)$  längs  $C$

$$A_{\lambda\mu}^\nu(t, 0) = \left( A_\beta^\nu A_\mu^\alpha V_\alpha A_\lambda^\beta \right)_C = 0, \quad \text{wo} \quad A_\beta^\nu A_\lambda^\beta = A_\beta^\beta A_\lambda^\nu = \delta_\lambda^\nu.$$

[Für allgemeinere Problemstellung siehe Hlavatý, Sulle coordinate geodetiche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI s., 10, 502—509 (1930).] Die Nebenbedingungen werden z. B. mittels

$$A_\lambda^\nu(t, x) = u_\lambda^\nu - u_\lambda^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\nu(t, 0)x^\beta + \dots$$

erfüllt, wenn in den ausgelassenen Gliedern die  $x^b$  mindestens quadratisch vorkommen.

Hlavatý (Praha).

**Craig, H. V.:** On a covariant differentiation process. II. Bull. Amer. Math. Soc. 39, 919—922 (1933).

In dieser Arbeit werden die Begriffe Gradient, Divergenz, Curl usw. sowie ihre Eigenschaften in bezug auf die schon früher eingeführten Konnexion [On parallel displacement in a non-Finsler space. Trans. Amer. Math. Soc. 33, 125—142 (1931); dies. Zbl. 1, 167 und On a covariant differentiation process. Bull. Amer. Math. Soc. 37, 731—734 (1931); dies. Zbl. 3, 75] untersucht. Außerdem wird die bestimmende Gleichung der Extremalkurven von  $\int f(x, x') dt$  angegeben. Hlavatý (Praha).

**Whitehead, J. H. C.:** The Weierstrass  $E$ -function in differential metric geometry. Quart. J. Math., Oxford Ser. 4, 291—296 (1933).

In einem Finslerschen Raum sei die Bogenlänge einer Kurve durch

$$\int F(x_1, \dots, x_n; \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}) dt \quad (1)$$

gegeben, wo  $F$  in den Koordinatenableitungen  $\frac{dx}{dt}$  positiv homogen von erster Ordnung ist. Es wird bewiesen: Dann und nur dann sind alle genügend kleinen Entfernungskugeln des Raumes konvex in bezug auf die Extremalen des Variationsproblems (1), wenn die zu (1) gehörige Weierstraßsche  $E$ -Funktion positiv ist, oder, was auf dasselbe hinausläuft, wenn das Variationsproblem (1) regulär ist. W. Fenchel.

### Topologie:

**Seifert, Herbert: Verschlingungsinvarianten.** S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 26/29, 811—828 (1933).

Für je zwei Elemente  $A_i, A_k$  der (eindimensionalen) Torsionsgruppe  $T$  einer  $M^3$  ist bekanntlich eine (gebrochene) Verschlingungszahl  $v(A_i, A_k)$  definiert, die den folgenden Bedingungen genügt: 1.  $v(A_i, A_k) = v(A_k, A_i)$ ; 2.  $v(A_i, A_k + A_l) = v(A_i, A_k) + v(A_i, A_l)$ ; 3. sind  $c_1, c_2, \dots, c_p$  die Torsionskoeffizienten (die „Elementarteiler“ der Gruppe  $T$ ), so gibt es zwei duale Basen  $C_1, C_2, \dots, C_p$  und  $C'_1, C'_2, \dots, C'_p$ , für die die Matrix der Verschlingungszahlen  $1/c_1, 1/c_2, \dots, 1/c_p$  auf der Hauptdiagonale und sonst lauter Nullen enthält (Poincaré-Veblenscher Dualitätssatz für Torsionsgruppen). Dieser Sachverhalt regt zur Aufstellung des Verschlingungsbegriffes (unter Geltung der Bedingungen 1—3) für beliebige endliche Abelsche Gruppen an und es entsteht die Frage nach der Angabe aller zur gegebenen Gruppe gehörenden Verschlingungen. Diese Frage wird vollständig gelöst. Das gewonnene rein algebraische Resultat wird sodann auf verschiedene topologische Fragen angewandt, und zwar auf Unterscheidung von Mannigfaltigkeiten mit gleicher Fundamentalgruppe, auf Unterscheidung gewisser Knoten (ebenfalls mit gleicher Gruppe) u. dgl.

P. Alexandroff (Moskau).

**Straszewicz, Stefan: Über einen topologischen Satz von A. Ostrowski.** Fundam. Math. 22, 24—27 (1934).

Gelegentlich der Ergänzung des ersten Gaußschen Beweises für den Fundamentalsatz der Algebra ist von Ostrowski (vgl. dies. Zbl. 7, 390) folgender topologische Satz bewiesen worden: Vor.: Es sei  $C$  topologisches Kreisbild in der Ebene,  $K'$  das Innere von  $C$  und  $K = K' + C$ . Ferner seien  $A_\nu$  bzw.  $T_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, 2n$ ) zyklisch geordnete Punkte auf  $C$  bzw. die von den  $A_\nu$  bestimmten offenen Teilbogen von  $C$ , wobei  $A_\nu$  Endpunkt von  $T_\nu$  ist. Wird dann durch die abgeschlossene Teilmenge  $A$  von  $K$  jeder  $T_{2\sigma}$  von jedem  $T_{2\tau-1}$  „getrennt“, so ordnen sich die  $A_\nu$  in  $n$  fremde Paare  $A_{2\sigma}, A_{2\tau-1}$ , so daß die Punkte des gleichen Paares einem Teilkontinuum von  $A$  angehören. — In vorliegender Note wird ein kurzer Beweis geliefert, welcher mit dem Begriffe des irreduziblen „Schnittes“ arbeitet. Haupt (Erlangen).

**Wolff, Julius, et Armand Denjoy: Sur la division d'une sphère en trois ensembles.** Enseignement math. 32, 66—68 (1933).

Für den Satz von Lusternik-Schnirelmann und Borsuk (vgl. dies. Zbl. 6, 424), daß bei jeder Zerlegung der Kugel des  $n$ -dimensionalen Raumes in  $n$  abgeschlossene Mengen wenigstens eine dieser Mengen ein Paar diametraler Punkte enthält, wird im Fall  $n = 3$  ein äußerst einfacher, mit elementaren Mitteln auskommender Beweis angegeben. W. Fenchel (Kopenhagen).

**Jessen, Borge: Elementare Beweise einiger Sätze über stetige Abbildungen einer Kugel auf sich.** Mat. Tidsskr. B H. 4, 55—58 (1933).

Auf Grund des elementar beweisbaren Satzes von der Nichtexistenz eines stetigen Tangentenfeldes auf der Kugelfläche (vgl. z. B. Fenchel, dies. Zbl. 5, 415) werden für folgende Sätze elementare Beweise angegeben: 1. Die identische Abbildung und die Diametralpunktvertauschung der Kugelfläche gehören verschiedenen Abbildungsklassen an. 2. Eine Selbstabbildung der Kugelfläche, die allen Punkten einen und denselben Punkt zuordnet, gehört weder zur Klasse der Identität noch zur Klasse der Diametralpunktvertauschung. 3. Jedes stetige Vektorfeld in der Vollkugel besitzt auf

dem Kugelrand wenigstens einen äußeren und einen inneren Normalenvektor. (Die Vektoren des Feldes werden alle von Null verschieden vorausgesetzt.) 4. Jede stetige Abbildung der Vollkugel auf sich besitzt wenigstens einen Fixpunkt. *H. Seifert.*

**Knaster, B., et S. Mazurkiewicz: Sur un problème concernant les transformations continues.** *Fundam. Math.* **21**, 85—90 (1933).

The authors call a continuum  $C$   $\alpha$ -connected provided it contains, for each pair of its points  $p, q$ , a simple arc  $pq$ ; and  $C$  is said to be  $\lambda$ -connected if it contains, for each  $p, q$ , an irreducible continuum  $K$  between  $p$  and  $q$  of type  $\lambda$ , i. e., such that  $K$  contains no indecomposable continuum except possibly continua of condensation. The authors show by two examples  $L_1$  and  $L_2$  that, whereas  $\alpha$ -connectivity is invariant relative to continuous transformations,  $\lambda$ -connectivity is not. It is notable that the continuum  $L_2$ , although itself  $\lambda$ -connected, admits a continuous image  $K$  which is not  $\lambda$ -connected between any pair of its points. The continuum  $L_1$  contains only two distinct indecomposable continua, and in this connection the authors show that any  $\lambda$ -connected continuum which can be transformed continuously into some indecomposable continuum must contain at least two distinct indecomposable continua. Both  $L_1$  and  $L_2$  are space continua, the question of the invariance of  $\lambda$ -connectivity for plane continua remaining open.

*G. T. Whyburn* (Baltimore).

**Wilder, R. L.: Concerning a problem of K. Borsuk.** *Fundam. Math.* **21**, 156—167 (1933).

Die allgemeine Fragestellung ist: Man weiß, daß das Kontinuum  $F \subset R^n$  bei jedem  $\varepsilon$  mittels einer  $\varepsilon$ -Überführung in eine zu  $F$  fremde Menge  $F'$  transformiert werden kann; was kann man (evtl. unter Nebenbedingungen wie lokaler Zusammenhang von  $F$  u. dgl. oder andererseits  $n \leq 3$ ) über die topologische Struktur von  $F$  aussagen? Verf. zeigt: sehr vieles. Zunächst wird mit ganz elementaren Hilfsmitteln geschlossen, daß  $F$ , auch wenn gar keine Nebenbedingungen vorliegen, jedenfalls die Eigenschaft besitzt, den  $R^n$  in höchstens zwei Gebiete zu zerlegen und die Begrenzung einer jeden Komponente von  $R^n - F$  zu sein. Falls  $F$  lokal zusammenhängend ist, so ist jedes Komplementärgebiet überdies unbewallt (gleichmäßig im Kleinen zusammenhängend). Diese Sätze zusammen mit den früheren Resultaten des Verf. (*Math. Ann.* **109**, 273—306; dies. Zbl. **8**, 87) erlauben zu beweisen, daß ein kompaktes lokal zusammenhängendes Kontinuum des  $R^3$ , welches den Raum zerlegt, eine endliche erste Bettische Zahl hat und die eingangs erwähnte Überführungseigenschaft besitzt, eine geschlossene zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist. Ferner wird die Klasse der zugelassenen  $\varepsilon$ -Überführungen eingeschränkt: es wird verlangt, daß die Überführung durch eine Deformation  $F_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $F_0 = F$ , des Kontinuums  $F$  erzeugt wird von der Eigenschaft, daß  $F_t$  für  $t \neq 0$  zu  $F$  fremd ist. Unter dieser Voraussetzung und der einzigen Nebenbedingung, daß das Kontinuum  $F$  den  $R^n$  zerlegt, wird gezeigt, daß  $F$  die lokal zusammenhängende Begrenzung zweier und nur zweier unbewallter Gebiete des  $R^n$  ist. Im Falle  $n = 3$  ergeben sich wiederum Charakterisierungen der geschlossenen Flächen. Unterwegs wird ein interessanter Verschlingungssatz bewiesen und ein Fehler im Beweise des Pontrjaginschen Deformationssatzes (*Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* **1927**, 315—322, Satz IV) richtiggestellt.

*P. Alexandroff* (Moskau).

**Nöbeling, Georg: Über die rationale Dimension.** *Math. Ann.* **109**, 353—375 (1934).

Wenn man zum Ausgangspunkt der induktiven Definition des Brouwer-Urysohn-Mengerschen Dimensionsbegriffes nicht die nulldimensionalen, sondern die nicht-leeren höchstens abzählbaren Mengen wählt, so gelangt man in wörtlich derselben Weise wie bei der Aufstellung des erwähnten Dimensionsbegriffes zu den von Menger als rational- $n$ -dimensional bezeichneten Mengen. Ihrer Untersuchung ist die Arbeit gewidmet. Dabei tritt ein merkwürdiger Parallelismus zwischen den Hauptsätzen der Urysohn-Mengerschen Theorie und analogen Sätzen über rational- $n$ -dimensionale Mengen. Und zwar: 1. Die Summe  $S$  von höchstens abzählbarvielen in  $S$  abgeschlossenen, höchstens (rational)- $n$ -dimensionalen Mengen ist höchstens (rational)-

$n$ -dimensional. 2. Eine höchstens (rational)- $n$ -dimensionale kompakte Menge kann bei jedem  $\varepsilon > 0$  dargestellt werden als Summe von endlichvielen abgeschlossenen Teilmengen mit Durchmessern  $< \varepsilon$ , die zu je  $k$  einen höchstens (rational)- $(n - k + 1)$ -dimensionalen Durchschnitt haben. Läßt sich umgekehrt die kompakte Menge  $M$  für irgendein  $k \leq n + 1$  und für jedes  $\varepsilon > 0$  als Summe von endlichvielen abgeschlossenen Mengen  $< \varepsilon$  darstellen, die zu je  $k$  einen höchstens (rational)- $(n - k + 1)$ -dimensionalen Durchschnitt haben, so ist  $M$  höchstens (rational)- $n$ -dimensional. 3. Eine Menge ist dann und nur dann rational- $n$ -dimensional, wenn sie Summe ist von  $n$  null-dimensionalen und einer höchstens abzählbaren Menge und wenn eine analoge Zerlegung in weniger Summanden unmöglich ist. 4. Es existiert im  $R^{2n+1}$  eine rational- $n$ -dimensionale Menge, die zu jeder höchstens (rational)- $n$ -dimensionalen Menge ein topologisches Bild enthält. 5. Eine kompakte Menge eines cartesischen Raumes ist dann und nur dann höchstens (rational)- $n$ -dimensional, wenn sie für jedes  $\varepsilon > 0$  in einen  $n$ -dimensionalen Komplex  $K$  derart  $\varepsilon$ -übergeführt werden kann, daß die Menge aller Punkte von  $k$  mit höchstens abzählbaren Urmengen in  $K$  dicht liegt. Es gibt auch ein Analogon (welches allerdings etwas komplizierter ist) zu dem Hurewiczschen Kompaktifikationssatz. *P. Alexandroff (Moskau).*

**Borsuk, Karol:** Zur Dimensionstheorie der lokal zusammenziehbaren Räume. *Math. Ann.* **109**, 376—380 (1934).

Es wird bewiesen, daß es zu jedem endlichdimensionalen, lokal zusammenziehbaren, kompakten, metrischen Raume  $F$  eine natürliche Zahl  $m$  gibt von der Eigenschaft, daß die Brouwer-Urysohn-Mengersche Dimension von  $F$  mit der Dimension modulo  $m$  von  $F$  übereinstimmt. Das Problem, ob unter den erwähnten Voraussetzungen über  $F$  die Dimension modulo eines beliebigen  $m$  der Brouwerschen Dimension gleich ist, bleibt offen. *P. Alexandroff (Moskau).*

## Relativitätstheorie.

**Takéuchi, Tokio:** Sur une extension de théorème de Cartan. *Tôhoku Math. J.* **38**, 320—323 (1933).

L'auteur a généralisé en mécanique relativiste le tenseur "Quantité de mouvement-énergie" de M. Cartan et montré que, si les photons ne sont pas soumis à des champs non constants, il y a conservation de la fréquence de lumière.

*Autoreferat.*

**Buhl, A.:** Gravifiques, groupes, mécaniques. *Mém. Sci. math. Fasc.* **62**, 1—61 (1934).

Verf. betrachtet einige mit der Theorie der infinitesimalen Transformationen und Transformationsgruppen verwandte Fragen in ihrer Beziehung zur Differentialgeometrie (speziell: zur Einsteinschen „einheitlichen Feldtheorie“ in deren verschiedenen Fasungen) und zu den nichtkommutativen (speziell: quantenmechanischen) Operatoren. Insbesondere wird das Produkt der Exponentialfunktionen zweier nichtkommutativen Operatoren untersucht. *V. Fock (Leningrad).*

**Veblen, Oswald:** Spinors in projective relativity. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **19**, 979—989 (1933).

Verf. versteht unter einem Spinor ein allgemeines geometrisches Gebilde, welches u. a. den Begriff des gewöhnlichen vierkomponentigen projektiven Spinors  $\Psi$ , sowie denjenigen der Gesamtheit der Matricelemente der 5 Tetroschen Matrizen  $\gamma$ , umfaßt. Für diese allgemeinen Spinoren werden Operationen definiert, welche 1. im Heben und Senken der Indizes, 2. im Übergang von den punktierten zu den nicht punktierten Indizes und umgekehrt und 3. im Übergang von einem Index eines projektiven Tensors zu einem Paar von Spinindizes und umgekehrt bestehen (ein punktierter Index bedeutet, daß die entsprechende Größe sich mit konjugiert-komplexen Koeffizienten transformiert). Die Transformationen 1., 2. und 3. geschehen mit Hilfe von drei besonderen Fundamentalspinoren. *V. Fock (Leningrad).*

**Géhéniau, Jules:** Les lois fondamentales de l'onde de L. de Broglie dans la gravifique de Th. de Donder. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 1393—1395 (1933).

**Milne, E. A.:** World-relations and the „cosmical constant“. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 94, 3—14 (1933).

Vorläufige Mitteilung von Resultaten einiger Untersuchungen des Verf., die sich anschließen an des Verf. Arbeit Z. Astrophys. 6, 1—95 (1933) [dies. Zbl. 6, 233]. 1. werden die statistischen Fragestellungen des II. Teils der genannten Arbeit wieder aufgerollt; 2. werden vermeintliche Zusammenhänge mit der bekannten statischen Lösung des kosmologischen Problems von Einstein hergestellt. Heckmann.

**Reichenbächer, Ernst:** Die Veränderlichkeit des Weltradius. Z. Astrophys. 7, 369 bis 372 (1933).

Es wird betont, daß der Weltradius nach der allg. Rel.-Theorie in Raumgebieten verschiedener Massendichte verschiedene Werte haben muß und daß er namentlich im Milchstraßensystem stark variere.

Daß diese nicht zu bezweifelnde Tatsache aber gegen die Theorie des „Expanding Universe“ ausgespielt wird, beruht auf einem Mißverstehen der von dieser Theorie gemeinten räumlichen Größenordnungen, wenn sie (übrigens auch nur zur mathematischen Vereinfachung der Fragestellung) von der räumlichen Konstanz des Weltradius spricht. — Was ferner die vom Verf. angezogene Weylsche Theorie der Eichinvarianz von 1919 und die von ihm selbst aufgestellten Feldgleichungen mit dem Fragenkomplex zu tun haben, bleibt dem Referenten unklar. Heckmann (Göttingen).

## Quantentheorie.

**Morand, Max:** Sur la nature des variables soumises aux relations d'incertitude en mécanique ondulatoire. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 3, 14—16 (1934).

**Born, M., and L. Infeld:** Foundations of the new field theory. Nature 132, 1004 (1933).

1. Der kürzlich von Born eingeführte Ausdruck für die Lagrangefunktion des elektromagnetischen Feldes kann in Analogie zur Lagrangefunktion  $-m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}$  des relativistischen Massenpunktes als einfachster möglicher Ausdruck der Tatsache angesehen werden, daß die Feldstärken am Orte eines Elektrons nicht unendlich werden.

2. Der Ausdruck

$$L = \sqrt{-|g_{kl}|} - \sqrt{-|g_{kl} + F_{kl}|}$$

hat vollkommenere Invarianzeigenschaften als die Maxwell'sche Lagrangefunktion  $\frac{1}{4} F_{kl} F^{kl}$ ; und er stimmt in statischen Feldern mit der Born'schen Lagrangefunktion überein. Es wird angedeutet, daß hiernach eine Verbesserung der Theorie möglich sei.

P. Jordan (Rostock).

**Born, Max:** Cosmic rays and the new field theory. Nature 133, 63—64 (1934).

Das Elektron der Born'schen Theorie, mit einer punktförmig konzentrierten wahren Ladung  $e$ , besitzt eine kontinuierlich räumlich verteilte freie Ladung, deren Dichte gleich

$$\varrho = \frac{e}{2\pi r_0^3} \cdot \frac{1}{r_0 \left(1 + \frac{r^4}{r_0^4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ist. Für die Einwirkung eines äußeren elektromagnetischen Feldes ist nun die freie Ladung des Elektrons maßgebend, wonach eine Schwächung dieser Einwirkung stattfindet bei Wellen, deren Wellenlänge nicht  $> r_0$  ist. Dies könnte wichtig sein für das Verständnis des großen Durchdringungsvermögens der Höhenstrahlung.

P. Jordan (Rostock).

**Basu, K.:** Theory of perturbation and the eigenvalue problem of an anharmonic oscillator. Indian Phys.-Math. J. 4, 1—8 (1933).

Der anharmonische Oszillator wird untersucht unter Anwendung der von Koch'schen Theorie der unendlichen Determinanten. Bei einer potentiellen Energie

$$V(x) = 2\pi^2 \nu_0^2 \mu x^2 + \lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^4$$

ergibt sich in sehr eleganter Rechnung die Energieformel

$$E(n) = (n + \frac{1}{2}) h \nu_0 + \lambda_2 \cdot \frac{3 \hbar^2}{8(2\pi^2 \mu \nu_0)^2} \{ (n + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \} \\ - \lambda_1^2 \cdot \frac{\hbar^2}{64 \nu_0 (2\pi^2 \mu \nu_0)^3} \{ 30(n + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{2} \} \\ - \lambda_2^2 \cdot \frac{\hbar^2}{128 \nu_0 (2\pi^2 \mu \nu_0)^4} \{ 34(n + \frac{1}{2})^3 - 4(n + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{2}(n + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \} + \dots$$

*P. Jordan* (Rostock).

**Goldstein, L.:** Sur les processus de matérialisation complexes. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 1596—1598 (1933).

Auf Grund einer quantenmechanischen Störungsbetrachtung wird die Wahrscheinlichkeit abgeschätzt für die Bildung eines Paares von einem positiven und einem negativen Elektron in der Nähe eines wasserstoffähnlichen Atoms unter gleichzeitiger Ionisierung des Atoms. *O. Klein* (Stockholm).

**Brogie, Louis de:** Sur la nature du photon. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 135—138 (1934).

Spekulative Betrachtungen über die Natur des Photons. Es werden Formeln für das einem Lichtquant zugeordnete elektromagnetische Feld aufgestellt, die allerdings dazu führen, daß das elektromagnetische Feld weder den Maxwell'schen Gleichungen noch sonst irgend linearen Differentialgleichungen genügt: das Superpositionsprinzip ist nicht erfüllt. Diese Formeln werden jedoch als Begründung der Vorstellung angesehen, daß das Lichtquant ein zusammengesetztes Gebilde sei, bestehend aus einem „Neutrino“ in Verbindung mit einem „Neutrino-Loch“ (im Sinne der Diracschen Löchertheorie).

*P. Jordan* (Rostock).

**Satô, Mizuho:** Über die gequantelte Brownsche Bewegung. Z. Physik 87, 669 bis 673 (1934).

**Wu, Ta-You:** Characteristic values of the two minima problem and quantum defects of  $f$  states of heavy atoms. Physic. Rev., II. s. 44, 727—731 (1933).

Mit der von Wentzel, Kramers und Brillouin angegebenen Methode zur angenäherten Integration der Wellengleichung werden die Eigenwerte berechnet für den Fall eines Potentials mit zwei ungleichen Minimis. Das Ergebnis läßt sich für die Berechnung gewisser Terme in den Spektren der schweren Atome verwerten. Es hat nämlich die potentielle Energie des „radialen“ Problems der „Leuchtelektronenbewegung“ — sie setzt sich aus dem Fermischen Atompotential und der Energie der Zentrifugalkraft zusammen — für die  $d$ -Zustände der 3. und 4. Periode und die  $f$ -Bahnen der schweren Elemente (etwa Hg bis U) zwei Minima. Die Berechnung der Quantendefekte in der Rydberg-Serienformel für die  $f$ -Zustände von Au bis U gibt den Wert 1,00 in sehr guter Übereinstimmung mit der Erfahrung. *Bechert* (Gießen).

**Ivanenko, D.:** Constitutive parts of atomic nuclei. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. Nr 2, 50—52 u. engl. Text 52—54 (1933) [Russisch].

**Destouches, Jean-Louis:** Remarques théoriques sur l'émission de rayons corpusculaires (rayons  $\beta$  et positrons) et sur la symétrie entre corpuscules et anticorpuscules. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 467—469 (1934).

**Duncanson, W. E.:** Some calculations on the range-velocity relation for alpha particles and protons. Proc. Cambridge Philos. Soc. 30, 102—113 (1934).

Unter Zugrundelegung der neuesten Beobachtungsdaten wird im Anschluß an Blackett [Proc. Roy. Soc. London A 135, 132 (1932); dies. Zbl. 4, 384] eine halbempirische Beziehung zwischen Reichweite und Energie aufgestellt. *H. Casimir*.

**Brogie, Louis de:** Passage des corpuscules électrisés à travers les barrières de potentiel. Ann. Inst. H. Poincaré 3, 349—446 (1933).

Auszug von Vorlesungen am Institut H. Poincaré 1931—1932. Nach einer Darstellung der Brillouin-Wentzelschen Methode wird deren Anwendung zur Berech-

nung der Durchlässigkeit eines Potentialberges skizziert und das Ergebnis (nach einer Betrachtung über die Reflexion von Materiewellen gegen eine Potentialwand) in Verbindung gesetzt mit der ausführlich abgeleiteten strengen Formel für die Durchlässigkeit eines rechteckigen Potentialberges, ferner auch mit der strengen Formel (Fowler-Nordheim) für die Durchlässigkeit einer Metalloberfläche. Die Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators werden nach der Methode von Laplace abgeleitet und deren asymptotisches Verhalten diskutiert. Die Ergebnisse werden zur Berechnung des Durchgangs eines Partikels durch ein begrenztes Oszillatorfeld (Potential  $U = Kx^2$  für  $-l < x < +l$ , sonst  $U = 0$ ) verwendet. Der Verf. betrachtet dann die Streuung von Partikeln durch ein sphärisches Potentialfeld (mit Anwendungen auf den Ramsauereffekt), sowie die Theorien der  $\alpha$ -Strahlemission. Die Analogien der wellenmechanischen Methoden und Ergebnisse mit den optischen werden durchgehend hervorgehoben. Waller (Upsala).

**Kretschmann, Erich: Beitrag zur Kritik der Bloch'schen Theorie der Elektrizitätsleitung. Z. Physik 87, 518—534 (1934).**

Der Verf. erhebt hauptsächlich zwei Einwände gegen die wellenmechanische, von Bloch begründete Theorie der elektrischen Leitfähigkeit. 1. Die mittlere Stoßzeit für ein Elektron komme kleiner heraus als die Schwingungsdauer der elastischen Wellen des Kristalls. Daher sei die Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten fehlerhaft, da sich keine „Resonanz“ zwischen den elastischen Schwingungen und den Elektronenwellen ausbilden könne. Eine beträchtliche Wahrscheinlichkeit für Übergänge schon innerhalb der Resonanzzeit (d. h. diejenigen, die zur Weginterferenz der nicht dem Energiesatz genügenden Übergänge nötig ist) beeinträchtigt aber nicht ihre Berechnung, sondern besagt nur, daß evtl. schon die höheren Näherungen (Mehrfachprozesse) eine Rolle spielen können. Dies ist nie bezweifelt worden und wird durch das stärkere als lineare Anwachsen des Widerstandes bei hohen Temperaturen bereits angedeutet. — 2. Die Formel Blochs für die Beschleunigung der Kristallelektronen durch ein elektrisches Feld sei falsch. Ein Widerspruch besteht aber nur zu der Annahme des Verf. Impuls = gewöhnliche Masse  $\times$  Geschwindigkeit, die im periodischen Feld nicht mehr richtig ist. Nordheim (Paris).

**Brillouin, Léon: Sur la stabilité du courant dans un supraconducteur. J. Physique Radium, VII. s. 4, 677—690 (1933).**

Ein Einwand von Bloch gegen eine frühere Theorie der Supraleitung des Verf. war, daß in der betrachteten Näherung, in der man den einzelnen Elektronen individuelle Bewegungszustände zuschreibt, ein Zustand mit einem von Null verschiedenen Strom unmöglich ein Energieminimum darstellen kann. Das Argument hiergegen ist nun, daß dies nicht gegen die Supraleitung spricht, solange nur die Zustände noch tieferer Energie nicht mit Hilfe der Störungen (Gitterstörungen, Wärmebewegung) erreicht werden können. Verf. glaubt Gründe zu sehen, daß das der Fall ist. Die Energieverteilung für ein kubisch-raumzentriertes Gitter wird näher diskutiert. Bemerkungen über die magnetischen Kräfte zwischen den Elektronen. R. Peierls (Manchester).

**Nordheim, Lothar: Interpretation of the Benedicks effect. Nature 133, 100—101 (1934).**

Bei der üblichen Behandlung des thermoelektrischen Effekts hängt das Potential zwischen zwei Punkten nur von deren Temperaturdifferenz, nicht aber von dem Verlauf der Temperatur zwischen ihnen ab. Das liegt an der bei dieser Behandlung gemachten Annahme, daß die Gebiete, über die sich die Temperatur merklich ändert, groß gegen die freie Weglänge der Elektronen sind. Sind sie dagegen hiermit vergleichbar, so wäre ein Benedickeffekt (Potentialdifferenz in einem homogenen Leiter mit unsymmetrischer Temperaturverteilung) zu erwarten. Um die Größenordnung abzuschätzen, wird der Grenzfall behandelt, in dem sich die Temperatur sprungweise ändert, wie dies an einer sehr schmalen Kontaktstelle zwischen Metallstücken ungleicher Temperatur möglich ist. In diesem Fall sollte der Effekt von der Größenordnung

einer normalen Thermospannung zu der gleichen Temperaturdifferenz werden. Eine Gegenüberstellung des theoretischen Bildes und der Messungen von Benedicks wird nicht gegeben.

*R. Peierls* (Manchester).

**Bloch, Felix: Molekulartheorie des Magnetismus.** Sonderdruck aus: Handbuch Radiol. 6, Tl 2, 375—484 (1934).

Überblick über die verschiedenen Typen des magnetischen Verhaltens von Körpern und ihre Beschreibung durch die Atomtheorie. Der Hauptwert liegt auf der Herausarbeitung des typischen Mechanismus, weniger auf einer Diskussion von Einzelfällen, die nur gelegentlich als Spezialfälle herangezogen werden. — Kap. I enthält die phänomenologische Theorie des Magnetismus sowie die thermodynamischen Relationen zwischen den verschiedenen magnetischen Konstanten, ferner die statistischen Relationen zwischen makroskopischen und Atomkonstanten. Kap. II behandelt Diamagnetismus von Atomen, Molekülen und freien Elektronen, Kap. III die paramagnetischen Erscheinungen in denselben Fällen. Das letzte Kapitel enthält einen Überblick über den jetzigen Stand der Theorie des Ferromagnetismus, sowohl des idealisierten „reinen Ferromagnetikum“ wie der Remanenzerscheinungen realer ferromagnetischer Stoffe.

*R. Peierls* (Manchester).

**Gans, Richard: Die Magnetisierungskurve ferromagnetischer Stoffe für sehr schwache Felder.** Ann. Physik, V. F. 18, 701—704 (1933).

Aufklärung einiger in der Literatur vorkommenden Mißverständnisse über die Rolle und die wechselseitige Abhängigkeit der verschiedenen Parameter, die bei der Untersuchung von Hysteresisschleifen in sehr schwachen Feldern auftreten.

*R. Peierls* (Manchester).

**Sauter, Fritz: Über den Mottischen Polarisisationseffekt bei der Streuung von Elektronen an Atomen.** Ann. Physik, V. F. 18, 61—80 (1933).

Mit Hilfe der Born-Diracschen Stoßtheorie wird die Polarisisation von schnellen Elektronen durch Reflektion an einem beliebigen, statischen Potentialfeld auf Grund der Wellengleichung von Dirac untersucht, wobei die Rechnung bis zur zweiten Näherung (die niederste Näherung, in der eine Polarisisation eines unpolarisierten Kathodenstrahls auftritt) getrieben wird. Die entwickelten Formeln werden für den Fall eines Zentralfelds näher untersucht und alle auftretenden Integrale für ein exponentiell abklingendes Coulombfeld ausgewertet. Für ein reines Coulombfeld ergibt sich Übereinstimmung mit dem früher von Mott mit Hilfe einer strengen Lösung der Diracgleichung unter Vernachlässigung der höheren Relativitätseffekte abgeleiteten Ausdruck für die Polarisisation bei zweimaliger Reflektion. Der Einfluß der Atomelektronen auf den Polarisisationseffekt wird als im allgemeinen sehr geringfügig abgeschätzt.

*O. Klein* (Stockholm).

**Goldstein, L.: Théorie des choes électroniques complexes.** J. Physique Radium, VII. s. 4, 576—593 (1933).

Behandelt man nach der Bornschen Stoßtheorie in erster Näherung den Stoß eines Elektrons mit einem Atom, so treten, solange man die Wechselwirkung der Elektronen im Atom vernachlässigt, nur Übergänge zu einfach angeregten Zuständen auf. Die Wechselwirkung gibt Anlaß zu mehrfachen Anregungen; für die entsprechenden Anregungswahrscheinlichkeiten werden in der vorliegenden Arbeit allgemeine Formeln aufgestellt, wobei die Wechselwirkung der Elektronen im Atom in erster Näherung berücksichtigt wird. Eine Anwendung auf spezielle Probleme wird nicht gegeben.

*H. Casimir* (Leiden).

**Blackman, M.: Die Feinstruktur der Reststrahlen.** Z. Physik 86, 421—447 (1933).

Die Absorption der Reststrahlen unter dem Einfluß der Anharmonizität der Gitterschwingungen wird theoretisch untersucht. Im eindimensionalen Fall ergibt sich, daß in der Absorption außer der „optischen“ Eigenfrequenz noch die Summe und Differenz aus der optischen und der akustischen Eigenfrequenz auftreten. Diese bilden nicht nur Maxima, sondern gleichzeitig Grenzen der Absorption, außerhalb der

beiden Grenzen verschwindet die Absorption. Im Grenzfall gleicher Massen verschwindet die untere Grenze, während die obere  $2\nu_0$  wird ( $\nu_0 =$  Reststrahlungsfrequenz). Im dreidimensionalen Fall liegen die Verhältnisse komplizierter, doch kann man zeigen, daß es auch hier zwei Grenzen der Absorption gibt, und daß diese in ähnlicher Weise mit der Masse veränderlich sind wie im eindimensionalen Fall. *R. Peierls* (Manchester).

**Elsasser, W. M.:** Sur la polarisation des électrons diffusés. *C. R. Acad. Sci., Paris* **197**, 1186—1188 (1933).

Es wird in Anschluß an Rechnungen von Förster [*Z. Phys.* **85**, 514 (1933); dies. *Zbl.* **7**, 269] gezeigt, daß, falls man sich beschränkt auf die erste Näherung der Bornschen Stoßtheorie, bei Streuung von Diracschen Spinelektronen durch ein beliebiges Potentialfeld keine Polarisation auftreten kann. *H. Casimir* (Leiden).

**Margenau, Henry:** Asymmetries of pressure broadened spectral lines. *Physic. Rev.*, **II. s. 44**, 931—934 (1933).

Using a theory of pressure widening previously given [W. W. Watson and H. Margenau, *Physic. Rev.* **44**, 748 (1933)] line contours are calculated for various laws of interaction between the emitting and perturbing atoms. A one-dimensional gas is taken, and the interaction curves are represented by segments of straight lines, and the results computed by graphical methods. When the interaction curves are chosen to show the proper features, in particular the repulsion at close distances, the various observed types of asymmetrical broadening of spectral lines can be accounted for, at least qualitatively. *W. H. McCrea* (London).

**Schilt, Heinz:** Die Kohärenzeigenschaften der emittierten und gestreuten Strahlung. *Helv. physica Acta* **7**, 83—107 (1934).

Die Kohärenzeigenschaften der von atomaren Systemen gestreuten oder emittierten Strahlung werden nach einer von W. Pauli (*Handb. d. Phys.*, Bd. XXIV, 2. Aufl. Berlin 1933) angegebenen Methode für mehrere Fälle diskutiert, wobei auch der Einfluß der Strahlungsdämpfung berücksichtigt wird. *H. Casimir* (Leiden).

**Sauter, Fritz:** Zur stationären Behandlung der elastischen Streuung sehr schneller Elektronen. *Z. Physik* **86**, 818—820 (1933).

Mittels der Bornschen Methode wird die Streuung von schnellen Elektronen in statischen Feldern auf Grund der Diracschen Wellengleichung berechnet, wobei sich eine einfache Ableitung der bekannten, relativistisch korrigierten Rutherford-Formel ergibt. *O. Klein* (Stockholm).

**Sauter, Fritz:** Zur unrelativistischen Theorie des kontinuierlichen Röntgenspektrums. *Ann. Physik*, **V. F. 18**, 486—496 (1933).

Es wird die Bremsstrahlung von Elektronen in einem reinen bzw. exponentiell abgeschirmten Coulombfeld durch Anwendung des Bornschen Näherungsverfahrens unter Vernachlässigung der Relativität berechnet. Im ersteren Fall ergeben sich Resultate, die — abgesehen von der unmittelbaren Nähe der kurzwelligen Grenze, wo das Verfahren unzulässig ist — mit der von Sommerfeld mit Hilfe der strengen Eigenfunktionen durchgeführten Behandlung übereinstimmen. Ferner wird ein Ausdruck gegeben für die Gesamtstrahlung eines Teilchens beim Durchtritt einer gegebenen Materieschicht, der sich nur um den Zahlenfaktor  $\pi/2\sqrt{3} = 0,90$  von der entsprechenden von Kramers korrespondenzmäßig abgeleiteten Formel unterscheidet. *O. Klein*.

**Breit, G.:** Quantum theory of dispersion. **VI a. VII.** *Rev. Modern Physics* **5**, 91—140 (1933).

Die Arbeit setzt den zusammenfassenden Bericht [in *Rev. Modern Physics* **4**, 504—576 (1932); dies. *Zbl.* **5**, 133] fort. Inhalt: VI. Phänomene nahe der Resonanz; VII. Kohärente und inkohärente Strahlung, Gebiet der Gültigkeit der Theorie. Verf. gibt eine ausführliche Darstellung mit mehreren eigenen Beiträgen. Darunter seien besonders erwähnt die Ausführungen über die Polarisation der Resonanzstrahlung.

*Waller* (Upsala).

**Hönl, H.: Atomfaktor für Röntgenstrahlen als Problem der Dispersionstheorie (K-Schale).** Ann. Physik, V. F. 18, 625—655 (1933).

Den bisherigen theoretischen Untersuchungen über Atomfaktoren liegt die Annahme zugrunde, daß jedes Volumelement der Schrödingerschen Ladungswolke gemäß der Thomsonformel streut; das Streumoment des Atoms erhält man dann einfach durch retardierte Zusammensetzung der Streuamplituden der einzelnen Volumelemente. Dieses Vorgehen ist indes nur dann berechtigt, wenn die einfallende Frequenz groß ist gegenüber den Eigenfrequenzen des Atoms; andernfalls tritt zu dem so berechneten Streumoment noch ein Dispersionsterm hinzu, der insbesondere in der Umgebung der Absorptionskanten von Wichtigkeit wird. Verf. berechnet nun — im Anschluß an seine frühere Arbeit über die Dispersion der Röntgenstrahlen (vgl. dies. Zbl. 7, 266) — diesen Dispersionsterm für die *K*-Schale aus der Wallerschen Streuformel [Z. Physik 51, 213 (1928)]. Hierbei wird von den Eigenfunktionen eines wasserstoffähnlichen Atoms ausgegangen und die Abschirmung nach einem Verfahren von Bethe (Handb. d. Phys., Bd. XXIV, Tl. 1, 477) berücksichtigt. Der Dispersionsterm wird nach Multipolen entwickelt und die Berechnung der Frequenzabhängigkeit für den Dipol und Quadrupol der *K*-Schale ausgeführt. Bereits unter alleiniger Berücksichtigung des Dipolgliedes wird im ganzen gute Übereinstimmung mit den neueren Messungen erreicht. Placzek (Kopenhagen).

**Williams, E. J.: Anomalous dispersion and absorption of X-rays.** Proc. Roy. Soc. London A 143, 358—376 (1934).

Ausgehend von dem Zusammenhang zwischen Oszillatorenverteilung im Kontinuum und photoelektrischer Absorption berechnet Verf. die Dispersion der Röntgenstrahlen aus den empirischen Daten über photoelektrische Absorption. Für Fe und Cu werden die Verhältnisse eingehender diskutiert. Es werden hierauf die Aussagen der Quantenmechanik über die Oszillatorstärken der *K*-Schale besprochen. Insbesondere wird der Einfluß der Abschirmung diskutiert und darauf hingewiesen, daß die Abweichung des empirischen Wertes 1,3 für die Gesamtoszillatorstärke des *K*-Kontinuums von dem Werte 0,87, der für das Kontinuum zweier wasserstoffähnlicher Elektronen gilt, sich quantitativ ergibt, wenn man die durch den Einfluß der äußeren Elektronen bewirkte Erniedrigung der Frequenz der *K*-Kante berücksichtigt (vgl. hierzu auch die Arbeiten von Hönl, dies. Zbl. 7, 266 und vorst. Referat und die in dem letzteren Referat erwähnte Bemerkung von Bethe). Für die *L*-Schale hingegen ist dieses Verfahren nicht ausreichend, vielmehr muß hier, um Übereinstimmung mit den experimentellen Daten (Absorption in der Nähe der *L*-Kante und gesamter *f*-Wert) zu erreichen, außerdem noch die effektive Kernladung frequenzabhängig — und zwar zunehmend mit steigender Frequenz — angenommen werden, wofür auch eine Begründung gegeben wird. Placzek (Kopenhagen).

**Trkal, V.: Remarques sur le travail de J. Neukirchen concernant la diffusion des rayons  $\gamma$  durs.** J. Physique Radium, VII. s. 4, 665—676 (1933).

J. Neukirchen [Z. Physik 6, 101 (1921)] gab eine Methode zur Bestimmung des wahren Absorptionskoeffizienten bzw. des Streukoeffizienten von  $\gamma$ -Strahlen an — bei Kenntnis des Gesamtabsorptionskoeffizienten  $\mu$ . Diese Methode benötigt die Aufnahme der Verteilung der Streuintensität nicht. [Die Methode wurde von W. Statz, Z. Physik 11, 304 (1922) auch für harte Röntgenstrahlen verwendet. Ref.]. Der Vergleich mit dem Experiment —  $\mu$  wurde hierbei Versuchen von K. W. F. Kohlrausch, Wiener Ber. 126, 441, 683, 705, 887 (1917), entnommen, unter Benutzung eines Komponentenansatzes für die Inhomogenität — ergab keine gute Übereinstimmung (vgl. hierzu K. W. F. Kohlrausch, Radioaktivität, Wien — Harmsches Handb. Exp. Physik 15, 111—113. Leipzig: Akad. Verlagsges. 1928. Ref.). — Verf. vorliegender Arbeit bemerkt nun, daß diese Nichtübereinstimmung auf Inkorrektheit der Auswertungsformeln von Neukirchen bzw. seines Ansatzes für die Inhomogenität zurückzuführen ist und gibt auf Grund des Lambertschen Kosinusetzes eine sehr sorgfältige und eingehende Theorie der Neukirchenschen Versuchsmethodik, ferner auch die Korrektur des Komponentenansatzes. Betreffend der Formeln — die an der Spitze der Arbeit übersichtlich zusammengestellt werden — muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. (Ein Vergleich der Theorie des Verf. mit den Versuchen wird nicht gegeben. Ref.) Guth (Wien).

## Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

**Bullen, K. E.:** On the errors in calculations of epicentral distances in earthquakes. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 3, 190—201 (1934).

**Nishimura, Genrokuro, Takeo Takayama and Kiyoshi Kanai:** On stresses in the interior and in the vicinity of a horizontal cylindrical inclusion of circular section in a gravitating semi-infinite elastic solid. II. *Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo* 11, 454—486 (1933).

This investigation is similar in general plan to an earlier one [*Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo* 11, 229 (1933); this *Zbl.* 7, 278] except that the medium in which the cylinder is imbedded approximates at great distances from the occlusion to a state of plane stress instead of one of plane strain. The stress-components are obtained as rather complicated expressions, but consisting of linear combinations of terms proportional to three quantities,  $\rho\xi$ ,  $\rho a$ ,  $\rho'a$ , where  $\xi$  is the depth of the centre of the inclusion;  $\rho$ ,  $\rho'$  the densities of the semi-infinite solid and the inclusion respectively;  $a$  the radius of the inclusion. For solids with Poisson's ratio  $\frac{1}{4}$  these three terms are each investigated in all the stress components, and a comparison is made with the results for plane strain. The terms in  $\rho'a$  are the same as for plane strain, but those in  $\rho a$  and  $\rho\xi$  are in general different. — It is found for the  $\xi$  terms that the stresses outside the inclusion tend to constancy, along a given radial direction, at great distances; within the inclusion, the stress  $\widehat{rr}$  is constant for a given  $\theta$ . All the components depend on  $\theta$ . At great distances the  $\rho a$  terms tend to increase linearly with  $r$ , whilst the terms in  $\rho'a$  tend to zero.

*R. Stoneley (Leeds).*

**Physics of the earth VI, Seismology.** *Bull. Nat. Res. Counc. Nr* 90, 1—223 (1933).

**Macelwane, James B.:** XI. Earthquake body waves. S. 106—115.

The classical theory of the propagation of compressional and distortional waves in a homogeneous elastic medium is first given, together with an outline of Love's theory of elastic waves in a gravitating compressible sphere, and Sezawa's examination of the effects of volume viscosity and shear viscosity. Hencky's work on the propagation of elastic waves in a solid subjected to high hydrostatic pressure is summarised, and the latter half of this Chapter XI is devoted to an account of Uller's generalization of the concept of wave-motion; by representing an elementary wave by a single complex formula, Uller shews that in general there are two characteristic wave-fronts, the phase-front and the amplitude-front, in general inclined to one another and corresponding to different wave velocities.

*R. Stoneley (Leeds).*

**Macelwane, James B.:** XII. Reflection and refraction of earthquake waves. S. 116 bis 120.

In this chapter (XII) the author obtains the equations for determining the directions and amplitudes of the reflected and refracted waves generated by the incidence of an elastic wave, either compressional or distortional, on a plane interface. Two methods are outlined (a) that followed by Knott and Jeffreys and (b) that of Zoepfritz and Gutenberg. Numerical results are not given.

*R. Stoneley (Leeds).*

**Macelwane, James B.:** XIII. Earthquake surface waves. S. 121—129.

The theory of Rayleigh-waves and Love-waves (Querwellen) on the plane surface of an elastic solid is treated in this chapter (XIII), with a reference to the theory of group-velocity and dispersion. An account is given of the three possible types of coupled surface-waves, as deduced from the Uller theory. Raleigh waves are a special case of Type  $\alpha$ , which in general resembles a distortional wave parallel to the surface, accompanied by condensations and rarefactions perpendicular to it. In the  $\beta$  and  $\gamma$  types the compressional wave is parallel to the surface and the distortional wave at right angles to it: in all three types there are components of displacement both normal to and parallel to the free surface.

*R. Stoneley (Leeds).*

**Macelwane, James B.: XIV. Paths and velocities of earthquake waves in the interior of the earth.** S. 130—136.

Chapter XIV contains an account of the methods by which the velocities of *P* and *S* waves, at different distances from the centre of the earth, have been determined from the travel times of earthquake shocks to known epicentral distances; when these velocities are known the paths of the seismic rays can be computed. The intensity-method, due to Zoeppritz, is sketched. The two general lines of procedure (those due to Herglotz and Wiechert, and Bateman and Knott respectively) are ineffective if there is a discontinuity of the first order, in which case recourse must be had to the method of trial and error.

*R. Stoneley* (Leeds).

**Slichter, L. B.: An inverse boundary value problem in electrodynamics.** *Physics* 4, 411—418 (1933).

Bei Aufgaben der angewandten Geophysik handelt es sich darum, aus den in einer Fläche, gewöhnlich der Erdoberfläche, vermessenen Feldgrößen Schlüsse auf den übrigen Feldbereich und damit auf die Beschaffenheit des Untergrundes zu ziehen. Dies ist im allgemeinen nicht möglich, da die Lösung nicht eindeutig ist. Unter bestimmten Annahmen aber ergeben sich eindeutige Lösungen, und zwar waren uns bislang zwei derartige Fälle bekannt, die sich dadurch auszeichnen, daß die Materialeigenschaften Funktionen nur einer einzigen Koordinate, nämlich der Tiefe, sind. Es handelt sich erstens um die Deutung der Laufzeitkurven in der Seismik und zweitens um die Deutung der elektrischen stationären Strömung, die von einer Punktelektrode an der ebenen Oberfläche eines Halbraumes wechselnder Leitfähigkeit ausgeht. Die vorliegende Arbeit löst ein drittes derartiges Problem, nämlich die Ermittlung der unbekannten Änderung der Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstanten mit der Tiefe aus der Kenntnis des elektromagnetischen Wechselfeldes an der Oberfläche eines Halbraumes, hervorgerufen durch einen magnetischen Oszillator. Die mathematische Behandlung der Aufgabe lehnt sich an eine ähnliche an, die A. Sommerfeld in den *Ann. Physik* (4) 81, 1135 (1926) behandelt hat.

*I. N. Hummel* (Göttingen).

**Graf, Anton: Theoretische Grundlagen der Ringsendemethode.** *Beitr. angew. Geophys.* 4, 1—75 (1933).

Eine geoelektrische Methode beruht darauf, daß das elektromagnetische Feld eines Wechselstromes durch den Untergrund entsprechend dessen Leitfähigkeit in verschiedener Weise beeinflußt wird. Bei der theoretischen Behandlung wird das tatsächliche Feld in einen primären und in einen sekundären Anteil zerlegt. Die vorliegende Arbeit liefert die Berechnung für einen kreisförmigen horizontalen Primärkreis über einer im Untergrund befindlichen, unendlich ausgedehnten, dünnen Platte beliebiger Neigung. Es wird zunächst das unbeeinflusste Primärfeld (Normalfeld) für mittlere Frequenzen (10—1000 Hertz) berechnet. Es wird angenommen, daß die Wellenlänge groß gegen die Entfernung zwischen Meßpunkt und Sendering ist, weshalb von der Wellenausbreitung abgesehen und die Laplacesche Gleichung angewandt werden kann. Deren Lösung wird mit Hilfe von Legendreschen Polynomen gegeben. Die sich dann ergebende Verteilung der magnetischen Feldvektoren wird graphisch aufgezeichnet und diskutiert. Befindet sich im Bereich des Normalfeldes eine leitende Masse, so werden in ihr Sekundärströme induziert, die ihrerseits ein elektromagnetisches Feld, das Sekundärfeld, erzeugen. Dessen Berechnung wird auf verschiedenen Wegen durchgeführt, und zwar zunächst streng für eine dünne, unendlich ausgedehnte Platte. Es wird neben dem rechnerischen auch ein graphisches Verfahren verwendet, das sich allerdings nur für den Fall der horizontalen Platte und nur für kleine oder sehr große Produkte aus Leitfähigkeit mal Frequenz streng durchführen läßt. Es wird ferner gezeigt, wie sich die Berechnung des Sekundärfeldes für die in einer dicken Platte, im Erdfeld (Streufeld) und in mehreren Schichten induzierten Ströme gestaltet. Ferner wird ein Verfahren angegeben, wie man Tiefe und Neigung der Platten bestimmen kann, und seine Anwendung an vorgegebenen Beispielen gezeigt. Die Wirkungsweise

der Ringsendemethode wird zum Schluß mit der der Widerstandsverfahren an Hand von praktischen Meßkurven verglichen.

*J. N. Hummel* (Göttingen).

● **Lagally, M.: Mechanik und Thermodynamik des stationären Gletschers.** Gerlands Beitr. Geophys. Suppl.-Bd. 2, 1—94 (1933) u. Leipzig: Akad. Verlagsges. m. b. H. 1934. 94 S. u. 13 Fig.

Die Finsterwaldersche kinematische Theorie der Gletscherbewegung, die nur von der Kontinuität der Gletscherbewegung ausgeht, wurde durch die Theorie von Somigliana, der das Gletschereis wie eine zähe Flüssigkeit behandelt, wesentlich weiter entwickelt. Unter der vereinfachten Annahme, daß der Gletscher sich gleichmäßig stationär in einem zylindrischen Gerinne bewegt und daß die Stromfäden der Zylinderachse parallel sind und die Geschwindigkeit auf jeder Stromlinie konstant ist, wird es möglich, die Geschwindigkeitsvorgänge im Gletscher zu beherrschen und aus der beobachteten Geschwindigkeitsverteilung einer Steinlinie, die quer über den Gletscher gelegt ist, die Tiefe einfacher Gletscher zu bestimmen. — Da in die Bewegungsgleichungen usw. die Zähigkeit des Eises mit eingeht, wird besonderer Wert auf die Bestimmung dieser Größe gelegt. Während die statisch bestimmten Werte alle zu klein ausfallen, hat Lagally die Größe aus der Bewegung eines Gletschers, dessen Profil durch Bohrungen bekannt war oder aus guten Karten abgeleitet werden konnte, bestimmt. Mit diesem Wert in die Gleichung für die Tiefe eines Gletschers eingehend, hat Verf. z. B. die Tiefe der Pasterze zu 235 m bestimmt, während Brockamp und Mothes nach der seismischen Methode für dieselbe Profilinie 250—270 m fanden. Diese gute Übereinstimmung spricht einmal überhaupt für die Brauchbarkeit der Theorie von Somigliana, dann aber auch für die Güte des von L. bestimmten Zähigkeitswertes. — Andererseits zeigen die Spalten und das Auftreten von elastischen Transversalwellen, daß ein Gletscher nicht nur zäh ist, sondern auch Formelastizität besitzt; die besten Werte für die elastischen Größen hat die seismische Methode gegeben. Oberhalb der Elastizitätsgrenze treten im Kristall Gleitbewegungen längs Translationsflächen auf. Die Spalten, die mit der Theorie von Somigliana zunächst nicht vereinbar erscheinen, fügen sich doch gut dieser Theorie ein. Da die Bewegung in der Mitte des Gletschers am größten ist, gegen die Ränder aber gegen Null abfällt, resultieren Zugspannungen, die zu bestimmt angeordneten Spalten führen müssen. — Die Blätterung im Eis führt Verf. in Übereinstimmung mit Hess auf ursprüngliche Firnschichtung zurück, im Gegensatz zu Phillip, der auf Grund seiner Beobachtungen der kontinuierlichen Bewegung nur wenig Bedeutung beimißt, das Hauptgewicht auf Gleitbewegung legt; Blaubänder und Blätter sind nach ihm nur vernarbte Gleitflächen. Gegen diese krasse Formulierung wendet sich L., glaubt aber auch, daß im arktischen Gletscher Gleitbewegungen auftreten, da bei ihm eine kalte spröde Schicht auf beweglichem Eis von Schmelztemperatur schwimmt. — Der Wärmehalt des Gletschers stammt über innere Reibung hauptsächlich aus potentieller Energie; so erwärmt sich ein Gletscher, der 100 m abwärts fließt, um  $\frac{1}{2}^{\circ}$ . — Die Kompressionswärme ist verschwindend klein, und der aus der Erde stammende Wärmestrom wird bei den meisten Gletschern zum Schmelzen an der Basis des Gletschers verbraucht. Die Temperaturschwankungen der Luft dringen in das Eis nicht sehr tief ein, wobei die Temperaturfortpflanzung nach unten hin der Poissonschen Gleichung genügt. — (Ref. hat in einer demnächst erscheinenden Arbeit, unabhängig von L., ausgehend von den Geschwindigkeiten der elastischen Wellen im Eis verschiedener Temperatur, die Temperaturverteilung im grönländischen Inlandeis bis in große Tiefen bestimmt und kommt zu Folgerungen, die sich mit den hier besprochenen in vielen Punkten decken.)

*Brockamp* (Kopenhagen).

**Witting, Rolf: Zur Bestimmung der Mischung im Meere.** Soc. Sci. Fennica. Comment. phys.-math. 7, Nr 2, 1—30 (1933).

Es werden Formeln entwickelt für vom Verf. ausgeführte Mischungsbestimmungen im Meer. Ein Flächenelement stehe senkrecht zur Stromrichtung ( $x$ -Richtung). Das mit der Geschwindigkeit  $s$  durchströmende Meerwasser wird künstlich gefärbt. Die Änderung der Färbungskonzentration  $u$  dient zur Bestimmung der Mischung. Unter der Annahme, daß der Austausch proportional dem Konzentrationsgefälle ist, ergibt sich im stationären Zustand, welcher bei den Versuchen herrschte,

$$-s \frac{\partial u}{\partial x} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Hier sind  $a$ ,  $b$ ,  $c$  die konstant angenommenen Austauschkoeffizienten. Von dieser Gleichung ausgehend werden nach bekannten mathematischen Methoden Formeln entwickelt, die die Bestimmung von  $a$ ,  $b$ ,  $c$  aus den Beobachtungen erlauben. Eine Zunahme des Austausches mit der Windstärke von 2—4,2 m/sec ist angedeutet. In vertikaler Richtung nimmt der Austausch in den Oberflächenschichten mit der Tiefe zu.

*Haurwitz* (Cambridge, Mass.).